昭和大学（Ⅰ期）数学　解答

1

(1)

$\xi^n = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$　　　$\cdots$(a) より、

$\xi^n - 1 = 0$

$(\xi - 1)(\xi^{n-1} + \xi^{n-2} + \xi^{n-3} + \cdots + \xi + 1) = 0$

nは2以上の整数であるから、$\sin\frac{2\pi}{n} \neq 0$であるため、$\xi - 1 \neq 0$

よって、$\xi^{n-1} + \xi^{n-2} + \xi^{n-3} + \cdots + \xi + 1 = 0$　　$\cdots$(b)　である。

(1-1)

$$
\begin{aligned}
1 + \xi + \xi^2 + \xi^3 + \cdots + \xi^n &= (1 + \xi + \xi^2 + \xi^3 + \cdots + \xi^{n-1}) + \xi^n \\
&= 0 + 1 \qquad (\because \text{(a)、(b)}) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

(1-2)

$\xi^k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ である。$1 \leqq k \leqq n-1$として、辺々足すと、

$$\sum_{k=1}^{n-1} \xi^k = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$-1 = \sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n} \qquad (\because \text{(b)})$$

両辺の実部と虚部を比較して、

① $\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2k\pi}{n} = -1$② $\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{2k\pi}{n} = 0$

(2)

問題文の後半を、

「$\vec{b}$が、$\vec{a}$に垂直なベクトル$\vec{c}$と、$\vec{a}$に平行なベクトル$\overrightarrow{a_1}$と、に分解される」

と読み替えました。

$\vec{b}$が、$\vec{a}$に垂直なベクトル$\vec{c}$と、$\vec{a}$に平行なベクトル$\overrightarrow{a_1}$と、に分解されるため、

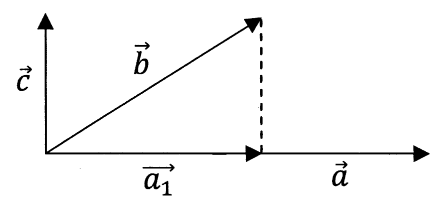
$\vec{b} = \vec{c} + \overrightarrow{a_1}$　　　とおける。

$\overrightarrow{a_1}$は、$\vec{b}$の$\vec{a}$に対する正射影ベクトルであるから、

$\overrightarrow{a_1} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$　　　となる。

よって、

$\vec{c} = \vec{b} - \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2}\vec{a}$



(3)

関数$f(x)$の値域は、$3^x > 0, 3^{-x} > 0$であるから、相加相乗平均の関係より、

$f(x) \geqq 1$（等号成立は$x = 0$のとき）

逆関数$f^{-1}(x)$は、定義域が$x \geqq 1$、値域が$f^{-1}(x) \geqq 0$であり、

$x = \frac{3^y + 3^{-y}}{2}$

をyについて解いたものである。yについて解くと、

$(3^y)^2 - 2x \cdot 3^y + 1 = 0$ より、

$3^y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$　…①

関数$f(x)$の定義域が$x \geqq 0$であることから、$y \geqq 0$、つまり、 $3^y \geqq 1$ である。

① を変形すると、$\pm\sqrt{x^2 - 1} \geqq x - 1$ でなければならないが、

$x \geqq 1$であることを考えると $3^y = x - \sqrt{x^2 - 1}$は不適。

よって、

$y = \log_3(x + \sqrt{x^2 - 1})$

逆関数$f^{-1}(x)$は、$f^{-1}(x) = \log_3(x + \sqrt{x^2 - 1})$

定義域は$f(x)$の値域であって、$x \geqq 1$

$\boxed{2}$

「損益額」を、(偶数の目の出た回数) − (奇数の目の出た回数) と定義する。

(1)

$\max_{0 \leqq i \leqq n} Z_i$ は、$Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ の最大値。つまり、賭けをn回繰り返して損益額が最大となったときの損益額の値である。

$M_4 = 4$ となるのは、偶数の目が 4 回連続で出た場合のみで　合計 1 通り

$M_4 = 3$ となるのは、偶数の目が 3 回連続で出た後、4 回目に奇数が出た場合のみで　合計 1 通り

$M_4 = 2$ となるのは、
偶数の目が 2 回連続で出た後、3 回目は奇数の目が出た場合の 2 通りと、
偶数と奇数の目が 1 回ずつ出た後、2 回連続で偶数の目が出た場合の 2 通りで、　合計 4 通り

$M_4 = 1$ となるのは、
偶奇偶奇と出た場合の 1 通り、偶奇奇と出た場合の 2 通り、
奇偶偶奇と出た場合の 1 通りで、　合計 4 通り

$M_4 = 0$ となるのは、
全事象の場合の数 16 通りから上記の場合の数を引いた場合で、　合計 6 通り

よって、

$$\mathrm{P(M_4 = 0)} = \frac{3}{8} \qquad \mathrm{P(M_4 = 1)} = \frac{1}{4} \qquad \mathrm{P(M_4 = 2)} = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{P(M_4 = 3)} = \frac{1}{16} \qquad \mathrm{P(M_4 = 4)} = \frac{1}{16}$$

(2)

$(Z_i = 0) \cap (Z_{i+1} = 1)$ は、賭けをi回繰り返した時点での損益額が 0 であり、
かつ、その次の$(i+1)$回目に偶数の目が出た場合であり、
$(Z_i = 1) \cap (Z_{i+1} = 0)$ は、賭けをi回繰り返した時点での損益額が 1 であり、
かつ、その次の$(i+1)$回目に奇数の目が出た場合である。

賭けをi回繰り返した時点での損益額が 0 となりうるのは偶数回賭けを行ったとき
賭けをi回繰り返した時点での損益額が 1 となりうるのは奇数会賭けを行ったとき
であるから、
$(Z_i = 0) \cap (Z_{i+1} = 1)$ と $(Z_i = 1) \cap (Z_{i+1} = 0)$ とは同時に起こりえない。

$T_4 = 4$ となるのは　合計 1 通り。

$T_4 = 3$ となるのは $T_3 = 3$, かつ, 最後が違う場合のみで、　合計 1 通り。

$T_4 = 2$ となるのは $T_2 = 0$ からの 1 通りと、
$T_2 = 1$ からの 1 通りと、
$T_2 = 2$ からの 2 通りで、 合計 4 通り。
$T_4 = 1$ となるのは $T_1 = 1$ からの 3 通りと、
$T_1 = 0$ からの 1 通りで、 合計 4 通り。
$T_4 = 0$ となるのは
全事象の場合の数 16 通りから上記の場合の数を引いた場合で 合計 6 通り。
よって、

$$\mathrm{P}(T_4 = 0) = \frac{3}{8} \qquad \mathrm{P}(T_4 = 1) = \frac{1}{4} \qquad \mathrm{P}(T_4 = 2) = \frac{1}{4}$$

$$\mathrm{P}(T_4 = 3) = \frac{1}{16} \qquad \mathrm{P}(T_4 = 4) = \frac{1}{16}$$

(3)

$T_5 = 0$ であるとき、一度も損益額が正の値となっていないため、
$M_5 = 0$ となる場合の数と等しい。
$M_5 = 4,5$ となるのは、(1)と同様に考えるとそれぞれ 1 通り。
また、$T_5 = 4,5$ となるのは、(2)と同様に考えるとそれぞれ 1 通り。
$M_5 = 3$ となるのは、 $M_3 = 3$ からの 3 通りと、
$M_3 = 1$ となる 2 通りからの各 1 通りで、
合計 5 通り。
$T_5 = 3$ となるのは、 $T_2 = 2$ からの 3 通りと、
$T_2 = 1$ からの 1 通りと、
$T_2 = 0$ からの 1 通りで、 合計 5 通り。
$M_5 = 2$ となるのは、 $M_3 = 2$ となる 1 通りからの 3 通りと、
$M_3 = 0$ かつ$Z_3 = -1$となる 2 通りからの各 1 通りで、
合計 5 通り。
$T_5 = 2$ となるのは、 $T_2 = 2$ からの 3 通りと、
$T_2 = 1$ からの 1 通りと、
$T_2 = 0$ からの 1 通りで、 合計 5 通り。
以上より、$M_5 = 1$ となる場合の数と、$T_5 = 1$ となる場合の数は等しい。
任意のkに対して、$M_5 = k$となる場合の数と、$T_5 = k$となる場合の数が等しいため、
$\mathrm{P}(M_5 = k) = P(T_5 = k)$ である。

$\boxed{4}$

(1)

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ より、

$ab = -1$

$a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b),\qquad a^4 + b^4 = (a^2+b^2)^2 - 2(ab)^2$ より、

$a^3 + b^3 = 4,\qquad a^4 + b^4 = 7$

$a^7 + b^7 = (a^3+b^3)(a^4+b^4) - (ab)^3(a+b)$ より、

$a^7 + b^7 = 29$

(2)

$$\frac{1}{\sqrt[3]{(k+1)^2}+\sqrt[3]{k(k+1)}+\sqrt[3]{k^2}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{k+1}-\sqrt[3]{k}}{\{\sqrt[3]{(k+1)^2}+\sqrt[3]{k(k+1)}+\sqrt[3]{k^2}\}(\sqrt[3]{k+1}-\sqrt[3]{k})}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{k+1}-\sqrt[3]{k}}{k+1-k} = \sqrt[3]{k+1}-\sqrt[3]{k}$$

よって、

（与式）$= \sum_{k=1}^{215}(\sqrt[3]{k+1}-\sqrt[3]{k})$

$= (\sqrt[3]{216}-\sqrt[3]{215}) + (\sqrt[3]{215}-\sqrt[3]{214}) + \cdots + (\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}) + (\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{1})$

$= \sqrt[3]{216}-\sqrt[3]{1} = 6-1 = 5$

(3)

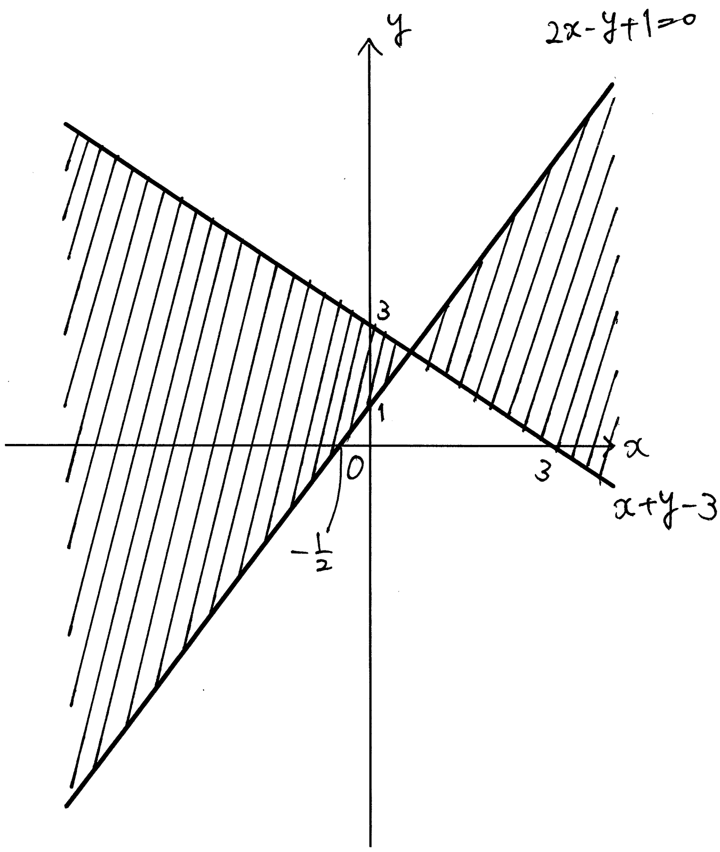
$2x^2 + xy - 5x - y^2 + 4y - 3$

$= 2x^2 + (y-5)x - (y-1)(y-3)$

$= (x+y-3)(2x-y+1)$

よって、与えられた領域を図示すると右図の斜線部となる。

（境界線含む）



$x^2 + y^2 = k$とおくと、kは原点からの距離の平方に等しい。

よって、$x^2 + y^2$の最小値は、

2 直線$x+y-3=0, 2x-y+1=0$と、原点との距離のうち、小さい方である。

$x+y-3=0$と原点との距離は$\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2x-y+1=0$と原点との距離は$\frac{3}{\sqrt{2}}$

よって、x^2+y^2の最小値は$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{1}{5}$

(4)

$f'(x) = 1 - a\sin x$

$f'(x) = 0$ を解くと、　$\sin x = \frac{1}{a}$

$a > 1$ より、$0 < \frac{1}{a} < 1$ なので、この方程式は$0 < x < 2\pi$ において２つの実数解α, β

$(\alpha < \beta)$を持つ。$\alpha + \beta = \pi$である。

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$, $\cos\beta = -\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$　である。

$f(x)$の、$0 < x < 2\pi$における増減表は以下。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘	極小		極大	↗	

$f(\alpha) = \alpha + a\frac{\sqrt{a^2-1}}{a} = 1$より、

$\alpha = 1 - \sqrt{a^2 - 1}$

$f(\beta) = \beta - a\frac{\sqrt{a^2-1}}{a} = \pi - \alpha - \sqrt{a^2 - 1} = \pi - 1$

(5)

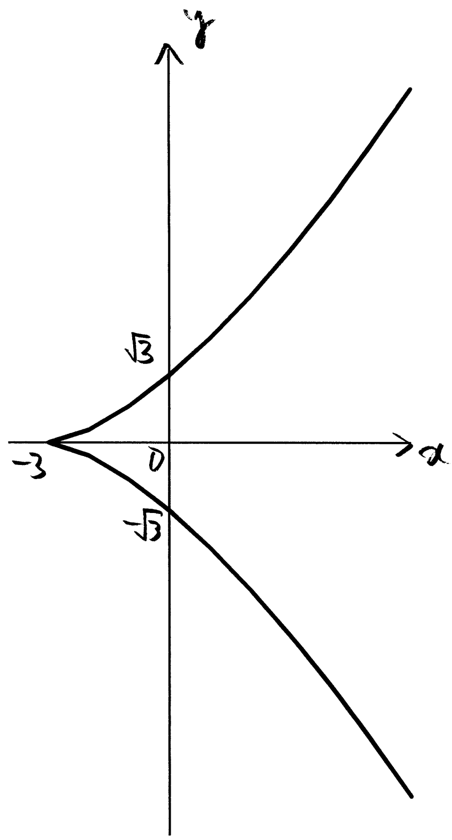
$9y^2 = (x+3)^3$ と、y軸との共有点のy座標は、

$y = \pm\sqrt{3}$

また、$y^2 \geqq 0$ から、$(x+3)^3 \geqq 0$ なので、

$x \geqq -3$　である。

$y = \pm\frac{(x+3)^{\frac{3}{2}}}{3}$ より、与えられた曲線は右図。



求める周の長さは、$y=\pm\frac{(x+3)^{\frac{3}{2}}}{3}$の$-3 \leqq x \leqq 0$におけるそれぞれの曲線の長さと、

与えられた曲線とy軸との共有点間の距離と、の和であるから、求める周の長さLは、

$$L = 2\int_{-3}^{0}\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}dx + 2\sqrt{3}$$

$$= 2\int_{-3}^{0}\sqrt{1+(\frac{1}{2}\sqrt{x+3})^2}dx + 2\sqrt{3}$$

$$= 2\int_{-3}^{0}\sqrt{x+7}dx + 2\sqrt{3}$$

$$= 2\left[\frac{2}{3}(x+7)^{\frac{3}{2}}\right]_{-3}^{0} + 2\sqrt{3}$$

$$= \frac{14}{3}\sqrt{7} + 2\sqrt{3} - \frac{16}{3}$$