[I]

(答) $p=24$, $q=64$

他の2つの解 … -2 と -8

(解説)

(i) 3つの解を $4, 4r, 4r^2$ とする

(r は公比)

解と係数の関係より

$$4+4r+4r^2=-6$$

$$2r^2+2r+5=0$$

判別式 $D/4=1-10=-9<0$

となり、r は虚数で不適.

(ii) 3つの解を $\frac{4}{r}$, 4, $4r$ とする.

$$\frac{4}{r}+4+4r=-6$$

$$2r^2+5r+2=0$$

$$(2r+1)(r+2)=0$$

$$r=-\frac{1}{2}, -2$$

いずれの場合でも、3つの解は

-2 と 4 と -8

解と係数の関係より

$$-p=(-2)\times4+4\times(-8)+(-2)(-8)$$

$$=-24 \qquad p=24$$

$$q=(-2)\times4\times(-8)=64$$

[II]

問1

(答) $S=\frac{1}{2}|(b-a)(c-a)(c-b)|$

(解説)

$A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$, $C(c, c^2)$ とすると、

$\overrightarrow{AB}=(b-a, b^2-a^2)$, $\overrightarrow{AC}=(c-a, c^2-a^2)$

$$S=\frac{1}{2}|(b-a)(c^2-a^2)-(b^2-a^2)(c-a)|$$

$$=\frac{1}{2}|(b-a)(c-a)\{(c+a)-(b+a)\}|$$

$$=\frac{1}{2}|(b-a)(c-a)(c-b)|$$

問2

(答) 最大値 15, 最小値 1

(解説) 以下 $a<b<c$ とする。

最小値は a, b, c をなるべく近い値にとればよい [例えば $(1, 2, 3)$]

このとき $S=\frac{1}{2}\times1\times2\times1=1$

最大値は $c-a=5$ に固定する

つまり $c=6$, $a=1$.

このとき

$b=2$ なら $S=\frac{1}{2}\times1\times5\times4=10$

$b=3$ なら $S=\frac{1}{2}\times2\times5\times3=15$

$b=4$ なら $S=\frac{1}{2}\times3\times5\times2=15$

$b=5$ なら $S=\frac{1}{2}\times4\times5\times1=10$

以上から 最大値 15

問3

(答) $\frac{2}{5}$

(解説)

a.b.cの偶奇の個数で場合分け

(i) 3つとも偶数のとき

b−a, c−a, c−bは全て偶数

となり Sは偶数

→ (2.4.6)

(ii) 2つが偶数, 1つが奇数のとき

偶−偶 の1つが偶数, 残りは奇数

となり Sが偶数となるのは,

偶−偶が 6−2=4 であるとき

→ (1.2.6), (2.3.6), (2.5.6)

(iii) 2つが奇数, 1つが偶数のとき

奇−奇 の1つが偶数, 残りは偶数

となり, Sが偶数となるのは

奇−奇が 5−1=4 であるとき

→ (1.2.5), (1.4.5), (1.5.6)

(iv) 3つとも奇数のとき

b−a, c−a, c−bは全て偶数

となり Sは偶数

→ (1.3.5)

(i)〜(iv)より 〰〰 の8通りあるので

$$\frac{8}{{}_6C_3}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$$

〔Ⅲ〕

$\int_0^x f(x-t)\sin t\,dt$ について,

$x-t=s$ として置換積分。

$$\begin{array}{c|c} t & 0\to x \\ \hline s & x\to 0 \end{array},\quad -dt=ds \text{ より } dt=-ds$$

$$f(x)=\log(x+1)+\int_x^0 f(s)\sin(x-s)(-ds)$$

$$=\log(x+1)+\int_0^x f(s)(\sin x\cos s-\cos x\sin s)ds$$

$$=\log(x+1)+\sin x\int_0^x f(s)\cos s\,ds$$

$$-\cos x\int_0^x f(s)\sin s\,ds \quad \cdots ①$$

①の両辺をxで微分すると

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}+\cos x\int_0^x f(s)\cos s\,ds$$

$$+\sin x f(x)\cos x+\sin x\int_0^x f(s)\sin s\,ds$$

$$-\cos x f(x)\sin x$$

$$=\frac{1}{x+1}+\cos x\int_0^x f(s)\cos s\,ds$$

$$+\sin x\int_0^x f(s)\sin s\,ds \quad \cdots ②$$

②の両辺をxで微分すると

$$f''(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}-\sin x\int_0^x f(s)\cos s\,ds$$

$$+\cos^2 x f(x)+\cos x\int_0^x f(s)\sin s\,ds$$

$$+\sin^2 x f(x)$$

$$=-\frac{1}{(x+1)^2}+f(x)$$

$$-\sin x\int_0^x f(s)\cos s\,ds+\cos x\int_0^x f(s)\sin s\,ds$$

$$\cdots ③$$

①+③より (……部に注意)

$$f(x)+f''(x)=\log(x+1)-\frac{1}{(x+1)^2}+f(x)$$

$$f''(x)=\log(x+1)-\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\int\left\{\log(x+1)-\frac{1}{(x+1)^2}\right\}dx$$

$$=(x+1)\log(x+1)-x+\frac{1}{x+1}+C_1$$

(C_1は積分定数)

②に $x=0$ を代入すると

$f'(0)=1$ と分かるので

$f'(0)=1+C_1=1$ 　$C_1=0$

よって

$$f'(x)=(x+1)\log(x+1)-x+\frac{1}{x+1}$$

$$f(x)=\int\left\{(x+1)\log(x+1)-x+\frac{1}{x+1}\right\}dx$$

$$=\frac{1}{2}(x+1)^2\log(x+1)-\frac{1}{4}(x+1)^2-\frac{1}{2}x^2+\log(x+1)+C_2$$

①に $x=0$ を代入すると

$f(0)=0$ と分かるので

$f(0)=-\frac{1}{4}+C_2=0$ 　$C_2=\frac{1}{4}$

以上より

$$f(x)=\log(x+1)\left\{\frac{1}{2}(x+1)^2+1\right\}-\frac{1}{4}(x+1)^2-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}$$

$$=\log(x+1)\times\left(\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x \text{ //}$$

[IV] 問1

(解) w が純虚数であるなら

$w+\overline{w}=0$ が成り立つ

$$\frac{1}{|z|^2-2z}+\frac{1}{|z|^2-2\overline{z}}=0$$

$$\frac{|z|^2-2\overline{z}+|z|^2-2z}{(|z|^2-2z)(|z|^2-2\overline{z})}=0$$

$$2|z|^2-2z-2\overline{z}=0$$

$$z\overline{z}-z-\overline{z}=0$$

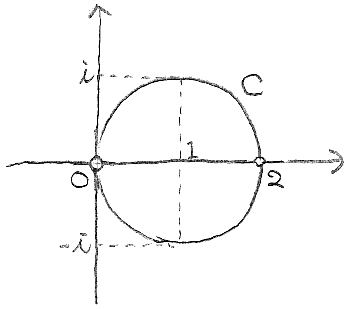
$$(z-1)(\overline{z}-1)=1$$

$$|z-1|=1$$

zは中心1, 半径1の円上を動く

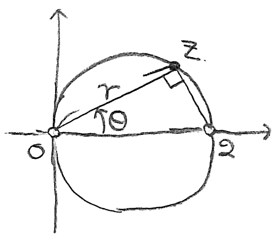
(ただし $z=0, 2$)

図示すると



問2

(解)



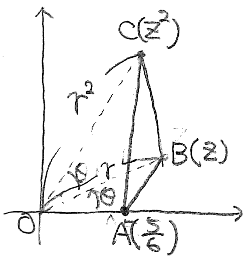
問1からzを左の図のように設定する。

$$r=2\cos\theta$$

また対称性を考えて

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする

このとき、$\frac{5}{6}$, z, z^2 は次の図のようになる



$\triangle ABC$

$=\triangle OAB+\triangle OBC-\triangle OAC$

であるから。

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot r\sin\theta+\frac{1}{2}r\cdot r^2\sin\theta-\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}r^2\sin 2\theta$$

$$=\frac{5}{6}\sin\theta\cos\theta+4\cos^3\theta\sin\theta-\frac{5}{3}\cos^2\theta\sin 2\theta$$

$$=\frac{5}{6}\sin\theta\cos\theta+\frac{2}{3}\cos^3\theta\sin\theta$$

これを $f(\theta)$ とおくと。

$$f'(\theta)=\frac{5}{6}\cos^2\theta-\frac{5}{6}\sin^2\theta-2\cos^2\theta\sin^2\theta+\frac{2}{3}\cos^4\theta$$

$$=\frac{8}{3}\cos^4\theta-\frac{1}{3}\cos^2\theta-\frac{5}{6}$$

$$=\frac{1}{6}(2\cos^2\theta+1)(8\cos^2\theta-5)$$

$\cos\theta=\sqrt{\frac{5}{8}}$, $\sin\theta=\sqrt{\frac{3}{8}}$ を

みたすθをαとすると

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$+$		$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$	$\boxed{}$	$\searrow$	

極大かつ最大

最大値は

$$f(\alpha)=\frac{5}{6}\times\sqrt{\frac{5}{8}}\times\sqrt{\frac{3}{8}}+\frac{2}{3}\times\frac{5}{8}\times\sqrt{\frac{5}{8}}\times\sqrt{\frac{3}{8}}$$

$$=\frac{\sqrt{15}}{8}\times\left(\frac{5}{6}+\frac{5}{12}\right)=\underline{\frac{5\sqrt{15}}{32}}$$

このとき $z=2\times\sqrt{\frac{5}{8}}\left(\sqrt{\frac{5}{8}}\pm\sqrt{\frac{3}{8}}i\right)$

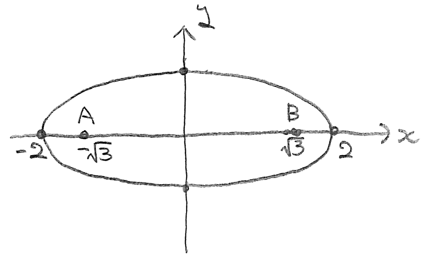
$$=\underline{\frac{5}{4}\pm\frac{\sqrt{15}}{4}i}$$

[V] 問1

（答） $2-\sqrt{3}<l<2+\sqrt{3}$

（解説）

まず楕円の式を求める。



$a=2$, $\sqrt{4-b^2}=\sqrt{3}$ より $b^2=1$

よって $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

点Pを(2,0)にとると

$l=|\vec{a}|=2+\sqrt{3}$

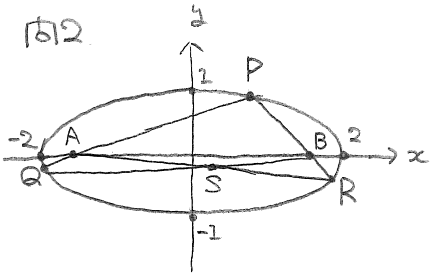
点Pを(-2,0)にとると

$l=|\vec{a}|=2-\sqrt{3}$

ただし、Pは長軸上にとれないので

lの範囲は $2-\sqrt{3}<l<2+\sqrt{3}$

問2



$PA=l$, $PB=4-l$

$AQ=sl$, $AB=2\sqrt{3}$, $BQ=4-sl$

△PABに余弦定理より

$$\cos\angle PAB=\frac{l^2+12-(4-l)^2}{2\cdot l\cdot 2\sqrt{3}}=\frac{8l-4}{4\sqrt{3}l}=\frac{2l-1}{\sqrt{3}l}$$

△QABに余弦定理より

$$\cos\angle QAB=\frac{s^2l^2+12-(4-sl)^2}{2\cdot sl\cdot 2\sqrt{3}}=\frac{8sl-4}{4\sqrt{3}sl}=\frac{2sl-1}{\sqrt{3}sl}$$

$\cos\angle PAB+\cos\angle QAB=0$ より

$$\frac{2l-1}{\sqrt{3}l}+\frac{2sl-1}{\sqrt{3}sl}=0$$

$$s(2l-1)+2sl-1=0$$

$$s(4l-1)=1$$

$$s=\frac{1}{4l-1}$$

同様に考えて

$s\to t$, $l\to 4-l$ とおきかえれば

$$t=\frac{1}{4(4-l)-1}=\frac{1}{15-4l}$$

問3 メネラウスの定理より

$$\frac{PA}{AQ}\times\frac{QS}{SB}\times\frac{BR}{RP}=1$$

$$\frac{1}{s}\times\frac{QS}{SB}\times\frac{t}{1+t}=1$$

$$\frac{QS}{SB}=\frac{s(1+t)}{t}=\frac{1}{4l-1}\times\frac{16-4l}{15-4l}\times\frac{15-4l}{1}=\frac{16-4l}{4l-1}$$

$\therefore QS:SB=16-4l:4l-1$

$$\overrightarrow{PS}=\frac{4l-1}{15}\times\overrightarrow{PQ}+\frac{16-4l}{15}\times\overrightarrow{PB}$$
$$=\frac{4l-1}{15}\times(1+s)\vec{a}+\frac{16-4l}{15}\vec{b}$$
$$=\frac{4l}{15}\vec{a}+\frac{16-4l}{15}\vec{b}$$

$\therefore v=\dfrac{4l}{15}$, $u=\dfrac{16-4l}{15}$

問4 メネラウスの定理より

$$\frac{PB}{BR}\times\frac{RS}{SA}\times\frac{AQ}{QP}=1$$

$$\frac{1}{t}\times\frac{RS}{SA}\times\frac{s}{1+s}=1$$

$$\frac{RS}{SA}=\frac{t(1+s)}{s}=\frac{1}{15-4l}\times\frac{4l}{4l-1}\times\frac{4l-1}{1}=\frac{4l}{15-4l}$$

ここで、

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{SQ \times SR}{SA \times SB} = \frac{16-4l}{4l-1} \times \frac{4l}{15-4l}$$

$8T_1 = 3T_2$ より $\frac{T_2}{T_1} = \frac{8}{3}$

$$\therefore \frac{(16-4l)\cdot \cancel{4}l}{(4l-1)(15-4l)} = \frac{\cancel{8}^{2}}{3}$$

$$3(16-4l)\cdot l = 2(4l-1)(15-4l)$$

$$48l - 12l^2 = -32l^2 + 128l - 30$$

$$20l^2 - 80l + 30 = 0$$

$$2l^2 - 8l + 3 = 0$$

$$\underline{l = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{2}}$$

(これは 問I をみたす)