[I]

問1 $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3a_n+1}$, $a_1 = \dfrac{1}{2}$

逆数をとって

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3a_n+1}{a_n} = \frac{1}{a_n} + 3$$

$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ は 初項2, 公差3の等差数列で

$$\frac{1}{a_n} = 2+3(n-1) = 3n-1$$

$$\therefore \underline{a_n = \frac{1}{3n-1}}$$

問2 $a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2} = \dfrac{1}{3k-1} \cdot \dfrac{1}{3k+2} \cdot \dfrac{1}{3k+5}$

$$= \left\{\frac{1}{(3k-1)(3k+2)} - \frac{1}{(3k+2)(3k+5)}\right\} \times \frac{1}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2} = \frac{1}{6}\left\{\left(\frac{1}{2\cdot5} - \cancel{\frac{1}{5\cdot8}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{5\cdot8}} - \cancel{\frac{1}{8\cdot11}}\right) + \cancel{\cdots} + \left(\cancel{\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}} - \frac{1}{(3n+2)(3n+5)}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{6}\left\{\frac{1}{10} - \frac{1}{(3n+2)(3n+5)}\right\} \quad \cdots ※$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{9n^2+21n}{10(3n+2)(3n+5)}$$

$$= \underline{\frac{n(3n+7)}{20(3n+2)(3n+5)}}$$

問3 問2の※を $n \to +\infty$ にして $\underline{\dfrac{1}{60}}$

[II]

問1

$$z^7 = \cos 7\theta + i\sin 7\theta$$
$$= \cos\pi + i\sin\pi = \underline{-1}$$

問2

$$(z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1)(z+1)$$
$$= z^7 + 1 = 0 \quad (\because 問1)$$

$z \neq -1$ であるから

$$z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$$
$$\therefore z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z = \underline{-1}$$

問3

$|z| = 1$ であるから

$$|z|^2 = z\cdot\overline{z} = 1 \quad \therefore \overline{z} = \frac{1}{z}$$
$$\cos\theta = \frac{z+\overline{z}}{2} = \underline{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)}$$

問4

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$= 2\times\left\{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\}^2 - 1$$
$$= \frac{1}{2}\left(z^2+2+\frac{1}{z^2}\right) - 1$$
$$= \underline{\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)}$$

問5

$$\cos 3\theta = -3\cos\theta + 4\cos^3\theta$$
$$= -3\cdot\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) + 4\cdot\left\{\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\}^3$$
$$= -\frac{3}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) + \frac{1}{2}\left(z^3+3z+\frac{3}{z}+\frac{1}{z^3}\right)$$
$$= \underline{\frac{1}{2}\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)}$$

(問4・問5の別解)

問3と同様に、 $\left(\overline{z^2} = \frac{1}{z^2},\ \overline{z^3} = \frac{1}{z^3}\right)$

$$\cos 2\theta = \frac{z^2+\overline{z^2}}{2} = \frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)$$
$$\cos 3\theta = \frac{z^3+\overline{z^3}}{2} = \frac{1}{2}\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)$$

問6

$$\cos\theta\cdot\cos 2\theta\cdot\cos 3\theta$$
$$= \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)$$
$$= \frac{1}{8}\left(z^6+z^4+z^2+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^6}+2\right)$$

ここで $z^7 = -1$ (問1) より

$$\frac{1}{z^2} = -z^5,\ \frac{1}{z^4} = -z^3,\ \frac{1}{z^6} = -z$$

を代入

$$= \frac{1}{8}\left(z^6 - z^5 + z^4 - z^3 + z^2 - z + 2\right)$$
$$= \frac{1}{8}\times(-1+2) = \underline{\frac{1}{8}}$$

問7

問3～5と同様に、 $\cos 5\theta = \frac{1}{2}\left(z^5+\frac{1}{z^5}\right)$

$$与式 = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}+z^3+\frac{1}{z^3}+z^5+\frac{1}{z^5}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(z - z^6 + z^3 - z^4 + z^5 - z^2\right)$$
$$= \underline{\frac{1}{2}}$$

〔II〕の更に別解

問6で用いたように

$z^7=-1$ から $\frac{1}{z}=-z^6$ などを用いて

問3 ⇒ $\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)=\underline{\frac{1}{2}\left(z-z^6\right)}$ "

問4 ⇒ $\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)=\underline{\frac{1}{2}\left(z^2-z^5\right)}$ "

問5 ⇒ $\frac{1}{2}\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)=\underline{\frac{1}{2}\left(z^3-z^4\right)}$ "

の形も考えられる。

〔Ⅲ〕　まず、積分を分解して、xの部分は外へ。

$$(\text{与式}) = \lim_{x\to\sqrt{\pi}}\left\{\frac{x^2}{x^3-\sqrt{\pi}x^2+\pi x-\pi\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{\pi}}^{x}\frac{e^{t^2}}{t^2\log t}dt + \frac{\sqrt{\pi}}{x^3-\sqrt{\pi}x^2+\pi x-\pi\sqrt{\pi}}\int_{\sqrt{\pi}}^{x}\frac{te^{t^2}}{t^2\log t}dt\right\}$$

$$= \lim_{x\to\sqrt{\pi}}\left\{\frac{x^2}{(x^2+\pi)(x-\sqrt{\pi})}\int_{\sqrt{\pi}}^{x}\underbrace{\boxed{\frac{e^{t^2}}{t^2\log t}}}_{f(t)\text{とおく}}dt + \frac{\sqrt{\pi}}{(x^2+\pi)(x-\sqrt{\pi})}\int_{\sqrt{\pi}}^{x}\underbrace{\boxed{\frac{te^{t^2}}{t^2\log t}}}_{g(t)\text{とおく}}dt\right\}$$

$$= \lim_{x\to\sqrt{\pi}}\left\{\frac{x^2\left[F(t)\right]_{\sqrt{\pi}}^{x}}{(x^2+\pi)(x-\sqrt{\pi})} + \frac{\sqrt{\pi}\left[G(t)\right]_{\sqrt{\pi}}^{x}}{(x^2+\pi)(x-\sqrt{\pi})}\right\}$$

※ $F(t)$, $G(t)$ は $f(t)$, $g(t)$ の原始関数

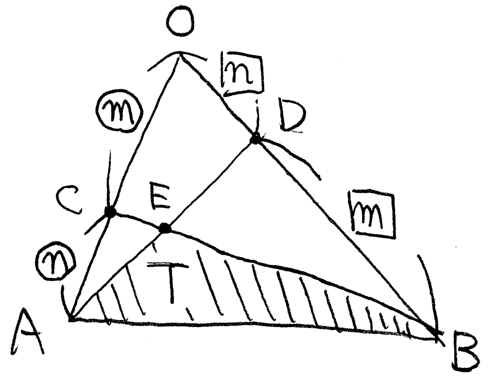
$$= \lim_{x\to\sqrt{\pi}}\left\{\frac{x^2}{x^2+\pi}\cdot\frac{F(x)-F(\sqrt{\pi})}{x-\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{\pi}}{x^2+\pi}\cdot\frac{G(x)-G(\sqrt{\pi})}{x-\sqrt{\pi}}\right\}$$

$$= \frac{\pi}{\pi+\pi}\cdot F'(\sqrt{\pi}) + \frac{\sqrt{\pi}}{\pi+\pi}\cdot G'(\sqrt{\pi})$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\pi}}{\pi\log\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2\pi}\cdot\frac{\sqrt{\pi}\cdot e^{\pi}}{\pi\log\sqrt{\pi}}$$

$$= \frac{e^{\pi}}{\pi\log\pi} + \frac{\cancel{\pi}e^{\pi}}{\cancel{\pi}\cdot\pi\log\pi} = \underline{\frac{2e^{\pi}}{\pi\log\pi}}$$

[IV]



問1　メネラウスの定理を用いると

$$\frac{OC}{CA}\times\frac{AE}{ED}\times\frac{DB}{BO}=1$$

$$\frac{m}{n}\times\frac{AE}{ED}\times\frac{m}{m+n}=1$$

$$\therefore AE:ED=n(m+n):m^2$$

$$\frac{T}{S}=\frac{m}{m+n}\times\frac{n(m+n)}{m^2+mn+n^2}$$

$$=\frac{mn}{m^2+mn+n^2}$$ //

問2

$$\frac{T}{S}=\frac{1}{\frac{m}{n}+1+\frac{n}{m}}$$ （分子・分母を mn で割った）

ここで、相加・相乗平均を用いて

$$分母=\frac{m}{n}+\frac{n}{m}+1\geqq 2\sqrt{\frac{m}{n}\cdot\frac{n}{m}}+1=3$$

よって、$\frac{m}{n}=\frac{n}{m}$ の時、

分母は最小値3　$\frac{T}{S}$ は最大値 $\frac{1}{3}$ //

$\frac{m}{n}=\frac{n}{m}$ の時　$m=n$ であるから

その確率は $\frac{1}{6}$ //

問3.

$\frac{n}{m}+\frac{m}{n}$ の最大値を調べればよい

仮に $m\geqq n$ であるとして、

$\frac{m}{n}=x$ とおき、$f(x)=\frac{1}{x}+x$ について、$x\geqq 1$ の範囲を調べると、

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}+1=\frac{x^2-1}{x^2}\geqq 0$$
$$(\because x\geqq 1)$$

よって $f(x)$ は単調増加であるから、

$x=\frac{m}{n}=\frac{6}{1}$ の時

$\frac{m}{n}+\frac{n}{m}=6+\frac{1}{6}=\frac{37}{6}$ が最大

この時、

$$\frac{T}{S}=\frac{1}{\frac{37}{6}+1}=\frac{6}{43}$$ が最小

また　$m\geqq n$ と仮に置いたので、

この時の (m,n) は $(1,6)$ と $(6,1)$ //

補足

(m,n) の組は36通り

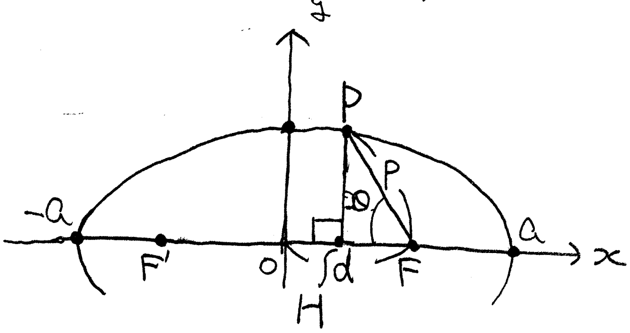
（対称性も考えたら21通り）なので、

問2、問3は、全て書き出しても

求められます。

[V]

問1. 楕円Aについて.



$FP + F'P = 2a$ であるから.

$$p + \sqrt{\underbrace{(p\sin 2\theta)^2}_{PH} + \underbrace{(2d - p\cos 2\theta)^2}_{F'H}} = 2a.$$

pを右辺に移項して2乗すると

$$\cancel{p^2\sin^2 2\theta} + 4d^2 - 4dp\cos 2\theta + \cancel{p^2\cos^2 2\theta} = 4a^2 - 4ap + \cancel{p^2}$$

$$4p(a - d\cos 2\theta) = 4(a^2 - d^2)$$

$$\therefore p = \frac{a^2 - d^2}{a - d\cos 2\theta}$$

qについては. $a \Rightarrow b$. $2\theta \Rightarrow \theta$ とすればよいので

$$q = \frac{b^2 - d^2}{b - d\cos\theta}$$

問2.3

$$\frac{q}{p} = \frac{(b^2 - d^2)(a - d\cos 2\theta)}{(a^2 - d^2)(b - d\cos\theta)} = \frac{b^2 - d^2}{a^2 - d^2} \cdot \frac{a - d(2\cos^2\theta - 1)}{b - d\cos\theta}$$

ここで $\cos\theta = t$ とおき $(0 < t < 1)$

$$f(t) = \frac{-2dt^2 + a + d}{b - dt}$$ について考える.

$$f'(t) = \frac{-4dt(b - dt) - (-2dt^2 + a + d)(-d)}{(b - dt)^2}$$

$$= \frac{2d^2t^2 - 4bdt + d(a + d)}{(b - dt)^2} = \frac{d\{2dt^2 - 4bt + (a + d)\}}{(b - dt)^2}$$

$g(t) = 2dt^2 - 4bt + (a + d)$ の概形を考えると

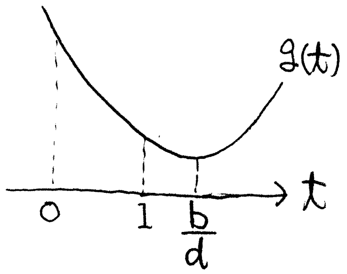
$$g(t) = 2d\left(t - \frac{b}{d}\right)^2 - \frac{2b^2}{d} + a + d$$

頂点 $\left(\frac{b}{d},\ \frac{-2b^2+ad+d^2}{d}\right)$

また $g(0) = a+d > 0$　　$\frac{b}{d} > 1$ に注意.

$g(1) = 3d - 4b + a$ であるから.

(i) $3d-4b+a \geqq 0$ の時.



となり. $0<t<1$ で $g(t)>0$.

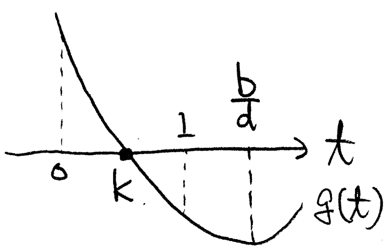
よって $f'(t)>0$

増減表は

t	0	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	
$f(t)$		↗	

となり. 最大値も最小値も存在しない.

(ii) $3d-4b+a<0$ の時.



となり. $g(t)=0$ となる t が

$0<t<1$ の範囲に存在する.

増減表は

t	0	$\cdots$	k	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$		$-$	
$f(t)$		↗	極大かつ最大	↘	

となり. 最大値は存在するが

最小値は存在しない.

以上より $\frac{q}{p}$ は最小値は

存在しないことが示された.

問2へ戻って

$3d-4b+a<0$ より

$0<d<\frac{a-4b}{3}$ であるから.

$\underline{a-4b>0}$ が $\frac{q}{p}$ が

最大値を持つ条件で

この時の d の範囲は

$$\underline{0<d<\frac{a-4b}{3}}$$