Ⅰ

$a_1 = 1$
$b_1 = 2$

$a_{n+1} = 3a_n - b_n$ —— ①

$b_{n+1} = 4a_n + 7b_n$ —— ②

①より $a_2 = 3a_1 - b_1 = \underline{1}$ —— ア

①より $b_n = 3a_n - a_{n+1}$ —— ①′

$b_{n+1} = 3a_{n+1} - a_{n+2}$ を②へ代入

$3a_{n+1} - a_{n+2} = 4a_n + 7(3a_n - a_{n+1})$

$\Leftrightarrow \quad a_{n+2} - 10a_{n+1} + 25a_n = 0.$ —— ③

③の特性方程式は

$x^2 - 10x + 25 = 0 \qquad x = 5.$

③$\Leftrightarrow \quad a_{n+2} - 5a_{n+1} = 5(a_{n+1} - 5a_n)$

$p = 5$ 公比 5 —— イ，ウ

$a_{n+1} - 5a_n = (a_2 - 5a_1)5^{n-1}$

$= \underline{-4 \cdot 5^{n-1}}$ —— エオ，カ

(b) $\dfrac{a_{n+1}}{5^{n+1}} - \dfrac{a_n}{5^n} = \underline{\dfrac{-4}{25}}$ —— キク，ケコ

$\dfrac{a_n}{5^n} = \dfrac{a_1}{5} + (n-1)\left(-\dfrac{4}{25}\right)$

$\Leftrightarrow \quad a_n = 5^n\left(\dfrac{1}{5} - \dfrac{4}{25}(n-1)\right)$

$= 5^{n-2}(5 - 4(n-1))$

$= \underline{5^{n-2}(-4n+9)}$ —— サシ，ス，セ

(c)

①' より

$$b_n = 3\cdot 5^{n-2}(-4n+9) - 5^{n-1}(-4(n+1)+9)$$

$$= 5^{n-2}(-12n+27 - 25 + 20n)$$

$$= 5^{n-2}(8n+2)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{5^{n-2}(-4n+9)}{5^{n-2}(8n+2)} = \underline{-\frac{1}{2}}$$ ——— ソタ，チ

$$2a_n + b_n = 5^{n-2}(-8n+18) + 5^{n-2}(8n+2)$$

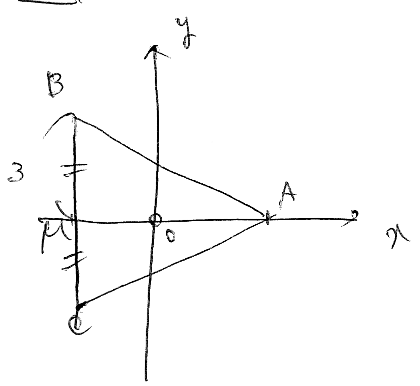
$$= 5^{n-2}\cdot 20 = 4\cdot 5^{n-1}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2a_n+b_n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4\cdot 5^{n-1}} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}}$$

$$= \underline{\frac{5}{16}}$$ ——— ツ，テト

$\boxed{\text{Ⅱ}}$



$AM = 3\sqrt{3}$

$OA = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$OM = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$

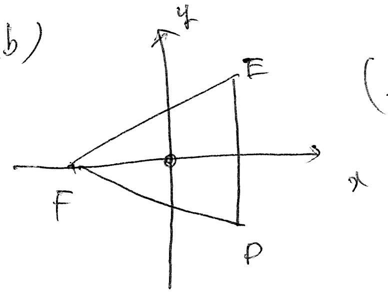
$A(2\sqrt{3},\ 0,\ 0)$ —— アイ

$B(-\sqrt{3}\ \ 3\ \ 0)$ $\quad C(-\sqrt{3}\ \ -3\ \ 0)$

$DE \parallel CB$ より $D(\sqrt{3}\ \ -3\ \ d)$ と表せる

$AD = 6 \Leftrightarrow d^2 = 24$ $\quad d = 2\sqrt{6}$ —— ウエ

(b)



（点Fは点Aと参考にして）

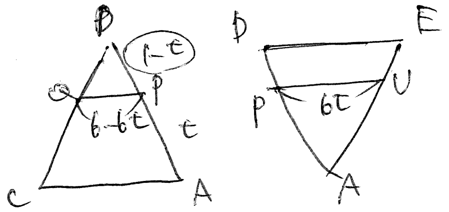
$F(-2\sqrt{3},\ 0,\ 2\sqrt{6})$

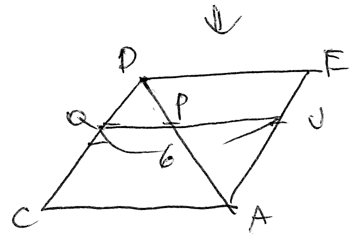
$M(-\sqrt{3},\ 0,\ 0)$

$\overrightarrow{MF} = (-\sqrt{3},\ 0,\ 2\sqrt{6})$ —— オカ, キク

$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{MA}}{|\overrightarrow{MF}|\,|\overrightarrow{MA}|} = \dfrac{-9}{3\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3}} = -\dfrac{1}{3}$ —— ケコ, サ

(c)





切り口と辺 DC, FC, FB, EB, EA の交点を各々 Q, R, S, T, U とおく

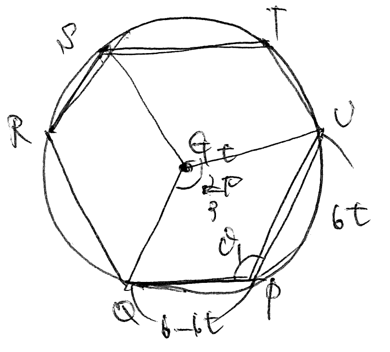
周の長さは $QU \times 3 = 6 \times 3 = 18$ —— シス

6角形 —— セ

点Pは線分ADを $t : 1-t$ に内分した点より

$P(\sqrt{3}(2-t),\ -3t\ \ 2\sqrt{6}t)$ $\quad G_t(0,\ 0\ \ 2\sqrt{6}t)$

$G_tP = 2\sqrt{3}\sqrt{t^2-t+1}$



四角形 G_tUPQ の内角の和は

$\frac{2}{3}\pi + 2\theta_1 = 2\pi$ $\quad \therefore\ \theta_1 = \frac{2}{3}\pi$

切り口の面積 $= 3 \times$ 四角形 G_tUPQ

$= 3 \times (\triangle G_tQU + \triangle PQU)$

$= 3 \times \left(\frac{1}{2} \cdot \left(2\sqrt{3}\sqrt{t^2-t+1}\right)^2 \sin\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{2}\, 6t(6-6t) \sin\frac{2}{3}\pi \right)$

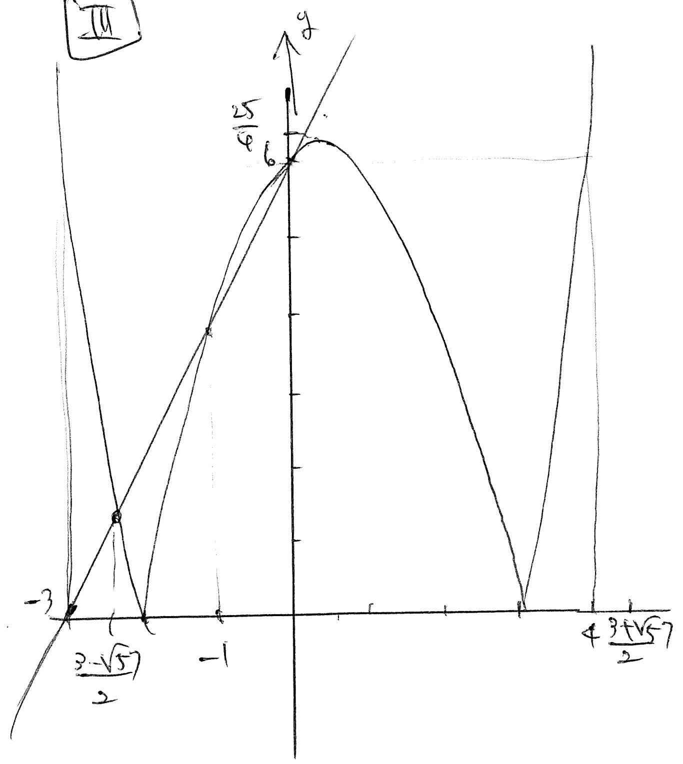
$= \left(-3\sqrt{3}\,(2t^2-2t-1)\right)3$

$= -3\sqrt{3}\left(2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}\right)\cdot 3$

$t=\frac{1}{2}$ で 最大値 $\frac{27\sqrt{3}}{2}$ ―――― チツ，テ，ト

半径 $GP = 2\sqrt{3}\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+1} = 3$ ―――― ナ

$\boxed{\text{III}}$



$f(x)=|(x+2)(x-3)|$

右図より

$x<\frac{3-\sqrt{57}}{2}$　　$-1<x<0$

$x>\frac{3+\sqrt{57}}{2}$

} ア, イウ, エ, オカ, キ

(b) (i) $y=-(x^2-x-6)$ と $y=2x+k$ が ~~接する~~とき

or

(ii) $y=2x+k$ が $(-2,\ 0)$ を通るとき　3つの実解をもつ

(i) のとき

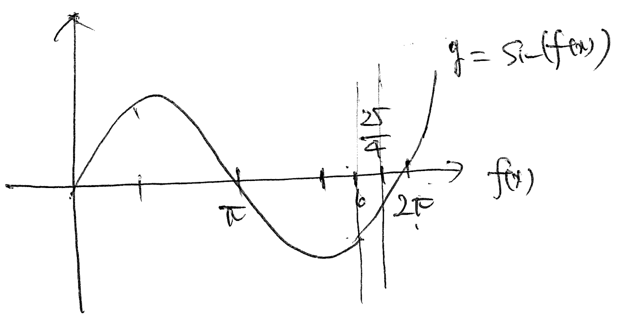
$-(x^2-x-6)=2x+k$ が 重解

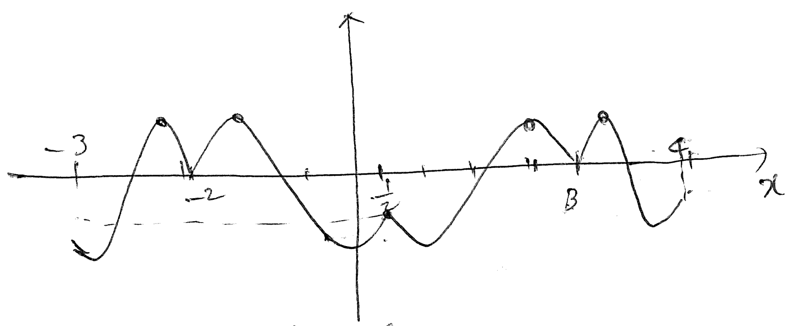
$D=0 \iff k=\frac{25}{4}$ ——————— ケコ, サ

(ii) $0=-4+k \iff k=4$ ——————— ク

(c)

x	$-3\to-2$	$-2\to\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\to3$	$3\to4$
$f(x)$	$6\to0$	$0\to\frac{25}{4}$	$\frac{25}{4}\to0$	$0\to6$





極大となる点　5コ ——— シ

$x=\frac{1}{2}$ ——— スセ

$\boxed{\text{IV}}$ $f(x) = -|x| \log |x|$.　（y軸対称）

$\Leftrightarrow$ $f(x) = \begin{cases} -x \log x & (x \geqq 0) \\ x \log(-x) & (x < 0) \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} -1 - \log x & (x \geqq 0) \\ 1 + \log(-x) & (x < 0) \end{cases}$

$f(-x) = f(x)$ より　y軸対称なので

$x \geqq 0$ で考える

$\frac{1}{x} = t$ とおくと

$\lim_{x \to \infty} \frac{\log_e x}{x} = \lim_{t \to 0} t \log \frac{1}{t} = \lim_{t \to 0} -t \log t = 0$ ——(*)

$f(0) = \lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} -x \log x = \underline{0}$ —— ア

(b) $f'(x) > 0 \Leftrightarrow -1 - \log x > 0$　$\therefore x < \frac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$	
f'		+		−
f	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘

$\lim_{x \to \infty} -x \log x = -\infty$.

$\alpha = \frac{1}{e}$　$\beta = \frac{1}{e}$ より　$\log_e \alpha = \underline{-1}$ —— イウ

$\log_e |\beta| = \underline{-1}$ —— エオ

(c) $t \geqq 0$ のとき　接線の方程式は

$y = (-1 - \log t)(x - t) - t \log t$

$(-1, 1)$ を代入　$\therefore t + \log t = \underline{0}$ —— ① —— カ

$t < 0$ のとき　接線の方程式は

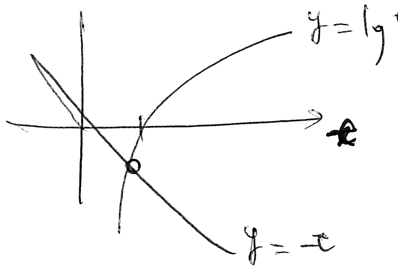
$y = (-1 + \log(-t))(x - t) + t \log(-t)$

$(-1, 1)$ を代入　$\therefore t + \log(-t) = \underline{-2}$ —— ② —— キク

① ② の 解の個数と 交点の本数は一致するので

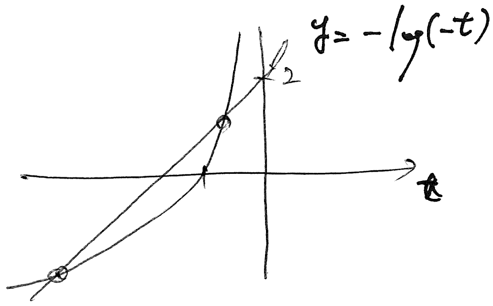
① ⟺ $\log t = -t$ →

1つ



② ⟺ $t+2 = -\log(-t)$

2つ



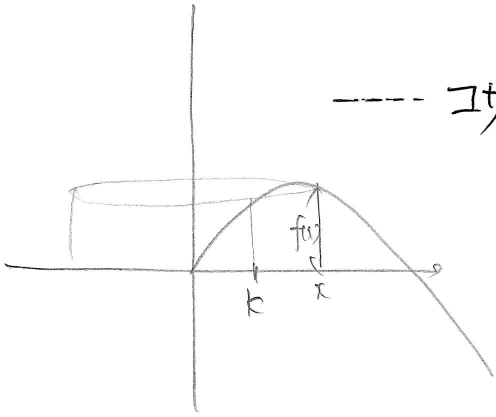
∴ 3つ ———————————— ケ

(d)

$$S(k) = \int_k^1 -x\log x\,dx = -\left\{\left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_k^1 - \int_k^1 \frac{1}{2}x\,dx\right\}$$

$$= +\frac{1}{2}k^2\log k + \frac{1}{4} - \frac{k^2}{4}$$

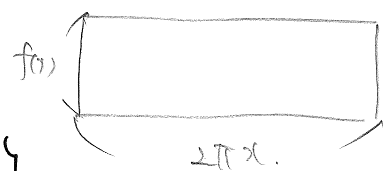
$$\lim_{k\to 0} S(k) = \frac{1}{4}$$ ---------- ---- コサ



$$V(k) = \int_k^1 2\pi x\cdot f(x)\,dx$$

$$= \int_k^1 -2\pi x^2\log x\,dx$$

$$= -2\pi\left\{\left[\frac{1}{3}x^3\log x\right]_k^1 - \int_k^1 \frac{1}{3}x^2\,dx\right\}$$



$$= -2\pi\left\{-\frac{1}{3}k^3\log k - \left[\frac{1}{9}x^3\right]_k^1\right\}$$

$$= \frac{2\pi}{3}k^3\log k + \frac{2}{9}\pi - \frac{2\pi}{9}k^3$$

$$\lim_{k\to 0} V(k) = \frac{2}{9}\pi$$ ———————————— シス