I

(a) 3回目終了で優勝者が決まらないとき、勝者をアルファベットで書くと

1回目	2回目	3回目
A →	C →	B
B →	C →	A

よって 2回目にCが試合をしているので 4試合目は、A, Bが必ず対戦 ∴ ①

また 6回目でCが優勝するのは

A → C → B → A → C → C

B → C → A → B → C → C

よって AがBに勝つ確率 $\frac{1}{2}$, BがCに勝つ確率 p, CがAに勝つ確率 $1-p$ より

$$\frac{1}{2}\times p\times(1-p)\times\frac{1}{2}\times(1-p)\times(1-p)+\frac{1}{2}\times(1-p)\times p\times\frac{1}{2}\times(1-p)\times(1-p)=\frac{1}{2}p(1-p)^3$$

$f(p)=\frac{1}{2}p(1-p)^3$ とおくと $f'(p)=\frac{1}{2}(1-p)^2(1-4p)$,

p	0		$\frac{1}{4}$		1
$f'(p)$		+	0	−	
$f(p)$	0	↗	$\frac{27}{512}$	↘	0

題意より $0<p<1$ よって $p=\frac{1}{4}$ のとき 最大値 $\frac{27}{512}$

何回状の取り組みにより Aが優勝するのは

A → A

A → C → B → A → A

A → C → B → A → C → B → A → A

⋮

となり $3k-1$ 回目 ($k=1,2,3\cdots$) に勝つ確率は $\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{k-1}\cdot\frac{1}{2}p$ —(i)

また

B → C → A → A

B → C → A → B → C → A → A

B → C → A → B → C → A → B → C → A → A

⋮

となり $3l+1$ 回目 ($l=1,2,3\cdots$) に勝つ確率は $\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{l}\cdot\frac{1}{2}$ —(ii)

Bが優勝する確率もAと同じ よって $\alpha=\beta$ より ②

(b) 3回目でCが優勝するのは

A → C → C

B → C → C

よって $p=\frac{1}{3}$ より $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

何回かの取り組みにより Cが優勝するのは

A → C → C

A → C → B → A → C → C

A → C → B → A → C → B → A → C → C

⋮

となり 3n回目 ($n=1,2,3,\cdots$) に勝つ確率は $\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{n-1}\cdot\frac{1}{2}(1-p)^2$ —①

また B → C → C

B → C → A → B → C → C

⋮

となり 3n回目 ($n=1,2,3,\cdots$) のときも同様に $\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{n-1}\cdot\frac{1}{2}(1-p)^2$ —②

ゆえに ①,②ともに初項 $\frac{1}{2}(1-p)^2$, 公比 $\frac{1}{2}p(1-p)$ の無限等比級数の和

を求めると $0<\frac{1}{2}p(1-p)<\frac{1}{2}$ より和は収束するから.

$$\frac{\frac{1}{2}(1-p)^2}{1-\frac{1}{2}p(1-p)}\times 2=\frac{(1-p)^2}{1-\frac{1}{2}p(1-p)} \quad \text{— (iii)}$$

$p=\frac{1}{3}$ を代入して $\frac{1}{2}$

(c) (a)より $\alpha=\beta$ より, α,β 共に収束する。

よって (a) の(i)(ii), (b) の(iii) より

$$\frac{\frac{1}{2}p}{1-\frac{1}{2}p(1-p)}+\frac{\frac{1}{2}p(1-p)\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}p(1-p)}=\frac{(1-p)^2}{1-\frac{1}{2}p(1-p)}$$

$$5p^2-11p+4=0$$

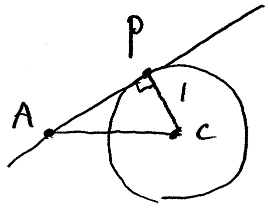
$0<p<1$ より $p=\frac{11-\sqrt{41}}{10}$

(解) ア,① $\frac{イ}{ウ}$, $\frac{1}{4}$ $\frac{エオ}{カキク}$, $\frac{27}{512}$, ケ,② $\frac{コ}{サ}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{シ}{ス}$, $\frac{1}{2}$ $\frac{セソ-\sqrt{タチ}}{ツテ}$, $\frac{11-\sqrt{41}}{10}$

II

(a) 点Pは球面S上にあるから

$$x^2+y^2+(z-\underline{1})^2=\underline{1} \quad — ①$$



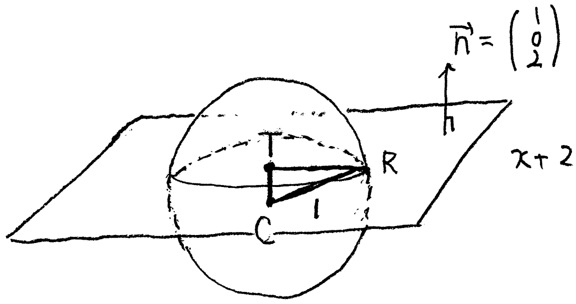
また 点Pは接点 より $\overrightarrow{CP} \perp \overrightarrow{AP}$ から

$$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AP}=\underline{0}$$

よって

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-3 \end{pmatrix}=0$$

$$x^2-x+y^2+z^2-4z+3=0$$



$x+2z=3.\ y=0.$

①より $x+\underline{2}z=\underline{3}$ …… (*)

法線ベクトル $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ より

交線の中心をTとおくと

$$\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OC}+t\vec{n}=\begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 2t+1 \end{pmatrix} \quad — ③$$

(*)より $t+2(2t+1)=3 \quad \therefore t=\frac{1}{5}$

③より $T\left(\underline{\frac{1}{5}},\ \underline{0},\ \underline{\frac{7}{5}}\right)$

交線上の点をRとおくと.

半径 $|\overrightarrow{TR}|=\sqrt{|\overrightarrow{CR}|^2-|\overrightarrow{CT}|^2}=\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\underline{\frac{2\sqrt{5}}{5}}$

また $|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{|\overrightarrow{CA}|^2-|\overrightarrow{CP}|^2}=\sqrt{5-1}=\underline{2} \quad — (**)$

(b) $\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}$ より

$$\begin{pmatrix} X-1 \\ Y \\ -3 \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-3 \end{pmatrix} \text{から} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{X-1}{k}+1 \\ \frac{Y}{k} \\ -\frac{3}{k}+3 \end{pmatrix}$$

(*)に代入して $k=\underline{\frac{7-X}{4}}$

また $|\overrightarrow{AQ}|=|k\overrightarrow{AP}|$, (*)(*) より

$$|\overrightarrow{AQ}|=2|\overrightarrow{AP}|$$

両辺を2乗して

$$X^2+\underline{2}X+\underline{\frac{4}{3}}Y^2=\underline{3}$$

ゆえに $\frac{(X+1)^2}{4}+\frac{Y^2}{3}=1$ より

焦点は原点と $(\underline{-2},\ \underline{0})$

(解) ア.1 イ.1 ウ.0 エ.2 オ.3
$\frac{カ}{キ}.\frac{1}{5}$ ク.0, $\frac{ケ}{コ}.\frac{7}{5}$ $\frac{サ\sqrt{シ}}{ス}.\frac{2\sqrt{5}}{5}$
セ.2
$\frac{ソ-X}{タ}.\frac{7-X}{4}$ チ.2, $\frac{ツ}{テ}.\frac{4}{3}$ ト.3
ナニ.−2 ヌ.0

III

(1) (分母) $= \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \left(4\cos^2\frac{\theta}{2} - 3\right) = 0$ より

(分子) $= \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} (\cos 3\theta + k\cos 2\theta) = 0$

ゆえに $-1 - \frac{1}{2}k = 0$ ∴ $k = \underline{-2}$

このとき

$$与式 = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{4\cos^3\theta - 3\cos\theta - 2(2\cos^2\theta - 1)}{4\cdot\frac{1+\cos\theta}{2} - 3}$$

$$= \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{(2\cos\theta - 1)(2\cos^2\theta - \cos\theta - 2)}{2\cos\theta - 1}$$

$$= \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} (2\cos^2\theta - \cos\theta - 2)$$

$$= \underline{-2}$$

(2) $$f(x) = \lim_{\alpha \to 2} \frac{\cos\alpha x - \cos 2x}{\alpha^2 + \alpha - 6}$$

$$= \lim_{\alpha \to 2} \frac{-2\sin\frac{\alpha+2}{2}x \cdot \sin\frac{\alpha-2}{2}x}{(\alpha-2)(\alpha+3)}$$

$$= \lim_{\alpha \to 2} \left(\frac{\sin\frac{\alpha-2}{2}x}{\frac{\alpha-2}{2}x}\right)\left(\frac{-2\sin\frac{\alpha+2}{2}x}{\alpha+3} \cdot \frac{1}{2}x\right)$$

$$= 1 \cdot \left(\frac{-2\sin 2x}{5}\right) \cdot \frac{1}{2}x$$

$$= -\frac{1}{5}x\sin 2x$$

よって $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{5} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \underline{\frac{-\sqrt{3}}{60}}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\frac{1}{5}x\sin 2x}{x^2} = \lim_{x \to 0}\left(-\frac{1}{5} \cdot \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2\right) = \underline{\frac{-2}{5}}$$

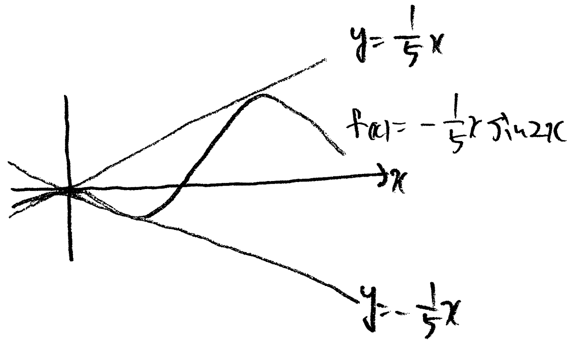
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(-\frac{1}{5}x\sin 2x\right) dx = \underline{\frac{-1}{20}}$$

また $x > 0$ のとき

$$-\frac{1}{5}x \leqq -\frac{1}{5}x\sin 2x \leqq \frac{1}{5}x$$

よって $y = -\frac{1}{5}x\sin 2x$ のグラフが 直線 $y = ax + b$ と共有点をもたないaは

$a > \underline{\frac{1}{5}}$, $b > \underline{0}$ または $a < \underline{\frac{-1}{5}}$, $b < \underline{0}$



(解) アイ, -2, ウエ, -2

$\frac{オカ}{キク}$, $\frac{-\sqrt{3}}{60}$, $\frac{ケコ}{サ}$, $\frac{-2}{5}$, $\frac{シス}{セソ}$, $\frac{-1}{20}$

$\frac{タ}{チ}$, $\frac{1}{5}$, ツ, 0, $\frac{テト}{ナ}$, $\frac{-1}{5}$, ニ, 0

IV

(a) $y=t^3-3t^2+2t \quad (0 \leqq t \leqq 1)$ より

$\dfrac{dy}{dt}=3t^2-6t+2$

よって $t=\underline{\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}}$ のとき

t	0		$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$		1
$\frac{dy}{dt}$	/	+	0	−	/
y	0	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	0

$y=t^3-3t^2+2t=\frac{1}{3}(t-1)(3t^2-6t+2)-\frac{2}{3}(t-1)$ より

最大値 $\underline{\dfrac{2\sqrt{3}}{9}}$

また $0<t<1$ のとき 点Pにおける曲線Cの接線の傾きは

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2-6t+2}{-2\sqrt{3}t+2\sqrt{3}}$$

となり x軸となす鋭角が $\frac{\pi}{6}$ より

$$\frac{3t^2-6t+2}{-2\sqrt{3}t+2\sqrt{3}}=\tan\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) \qquad \therefore t=\underline{\frac{2}{3}}$$

(b) 時刻tにおける点Pの速さは

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(-2\sqrt{3}t+2\sqrt{3})^2+(3t^2-6t+2)^2}$$

$$=\sqrt{(3t^2-6t+4)^2}$$

$$=\underline{3}t^2-\underline{6}t+\underline{4} \quad (\because 3t^2-6t+4>0)$$

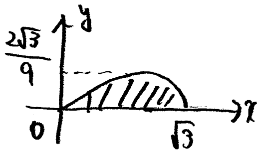
また 曲線の長さは

$$\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^1(3t^2-6t+4)dt=\underline{2}$$

(c) $x=-\sqrt{3}t^2+2\sqrt{3}t \quad (0 \leqq t \leqq 1)$ より

$\dfrac{dx}{dt}=-2\sqrt{3}(t-1)$

t	0		1
$\frac{dx}{dt}$	/	+	/
x	0	↗	$\sqrt{3}$



また (a) より 面積は

$$\int_0^{\sqrt{3}}y\,dx=\int_0^1(t^3-3t^2+2t)\frac{dx}{dt}\cdot dt$$

$$=-2\sqrt{3}\int_0^1(t^4-4t^3+5t^2-2t)dt$$

$$=-2\sqrt{3}\left[\frac{1}{5}t^5-t^4+\frac{5}{3}t^3-t^2\right]_0^1$$

$$=\underline{\frac{4\sqrt{3}}{15}}$$

(解) $\dfrac{ア-\sqrt{イ}}{ウ}$, $\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$, $\dfrac{エ\sqrt{オ}}{カ}$, $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$, $\dfrac{キ}{ク}=\dfrac{2}{3}$

ケ,3. コ,6. サ,4 シ,2

$\dfrac{ス\sqrt{セ}}{ソタ}=\dfrac{4\sqrt{3}}{15}$