1

(1) (解) ・$a+b<c$

5点のとき $(a,b,c)=(1,1,3)$ の1通り　よって $\frac{1}{6^3}=\underline{\frac{1}{216}}$ —(ア)

6点のとき ・$a+b<c$　　　　・$a+b\geqq c$

$(a,b,c)=(1,1,4)$　　　$(a,b,c)=(1,1,1)$

7点のとき ・$a+b<c$

$(a,b,c)=(1,1,5),(1,2,4),(2,1,4)$

8点のとき ・$a+b<c$

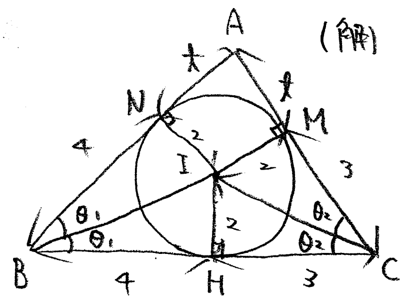
$(a,b,c)=(1,1,6),(1,2,5),(2,1,5)$

・$a+b\geqq c$

$(a,b,c)=(1,1,2),(1,2,1),(2,1,1)$

以上　8点以下(5点〜8点)は12通り　よって $\frac{12}{6^3}=\underline{\frac{1}{18}}$ —(イ)

(2)



(解) $\triangle ABC$の内心I，$\angle ABC=2\theta_1$　$\angle ACB=2\theta_2$

$\cos 2\theta_1=2\cos^2\theta_1-1=\frac{3}{5}$

$\cos^2\theta_1=\frac{4}{5}$　$0<\theta_1<\frac{\pi}{2}$ より $\cos\theta_1=\frac{2}{\sqrt{5}}$

よって $\tan^2\theta_1=\frac{1}{\cos^2\theta_1}-1=\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}$　$\therefore \tan\theta_1=\frac{1}{2}$

$\tan\theta_1=\frac{IH}{BH}=\frac{1}{2}$　　$\therefore BH=4$

同様に $\cos 2\theta_2=2\cos^2\theta_2-1=\frac{5}{13}$ より $\cos\theta_2=\frac{3}{\sqrt{13}}$　　$\therefore \tan\theta_2=\frac{2}{3}$

$\tan\theta_2=\frac{IH}{CH}=\frac{2}{3}$　　$\therefore CH=3$

$\therefore BC=BH+CH=4+3=\underline{7}$ —(ウ)

また $AN=AM=x$ とおくと，$\triangle ABC$ において余弦定理より

$(x+3)^2=(x+4)^2+7^2-2\times(x+4)\times 7\times\cos 2\theta_1$

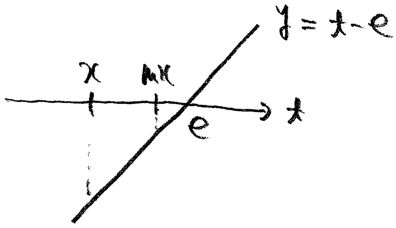
$\cos 2\theta_1=\frac{3}{5}$ より 上式を解くと $x=\frac{7}{2}$

ゆえに　$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times IH\times(AB+BC+CA)$

$=\frac{1}{2}\times 2\times\left(4+\frac{7}{2}+7+3+\frac{7}{2}\right)=\underline{21}$ —(エ)

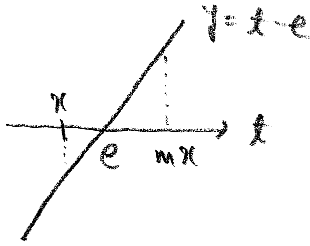
2 $m>1$. $f(x)=\int_x^{mx}\frac{|t-e|}{t}dt\ (x>0)$

(1) (解)



(i) $mx\leqq e \iff x\leqq\frac{e}{m}$ のとき

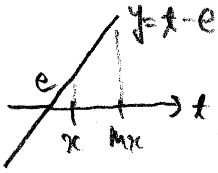
$$f(x)=\int_x^{mx}\frac{-(t-e)}{t}dt=\int_x^{mx}\left(-1+\frac{e}{t}\right)dt$$
$$=\Big[-t+e\log t\Big]_x^{mx}$$
$$=-(m-1)x+e\log m$$



(ii) $x\leqq e\leqq mx \iff \frac{e}{m}\leqq x\leqq e$ のとき

$$f(x)=\int_x^{e}\frac{-(t-e)}{t}dt+\int_e^{mx}\frac{t-e}{t}dt=\Big[-t+e\log t\Big]_x^{e}+\Big[t-e\log t\Big]_e^{mx}$$
$$=(m+1)x-2e\log x-e\log m$$

(iii) $e\leqq x$ のとき



$$f(x)=\int_m^{mx}\frac{t-e}{t}dt=(m-1)x-e\log m$$

(i)〜(iii) より

$$f(x)=\begin{cases}-(m-1)x+e\log m & \left(0<x\leqq\frac{e}{m}\right)\\ (m+1)x-2e\log x-e\log m & \left(\frac{e}{m}\leqq x\leqq e\right)\\ (m-1)x-e\log m & (e\leqq x)\end{cases}$$ —(答)

また (ii) より $f'(x)=m+1-\frac{2e}{x}=\frac{(m+1)x-2e}{x}$

$f'(x)=0$ になるのは $x=\frac{2e}{m+1}$

($m>1$ より $\frac{e}{m}<\frac{2e}{m+1}<e$)

$f(x)$ は $x>0$ で連続より (i)(ii)(iii) をまとめて

x	0		$\frac{e}{m}$		$\frac{2e}{m+1}$		e	
$f'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\searrow$	最小	$\nearrow$		$\nearrow$

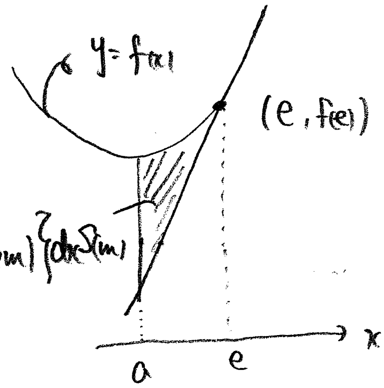
$x=\frac{2e}{m+1}$ のとき最小となる

$\therefore\ a=\frac{2e}{m+1}$ —(答)

(2) (解) $\displaystyle\lim_{x\to e\pm0}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}=m-1$ より $x=e$ で微分可能.

よって $(e,f(e))$ における接線は

$$y=(m-1)x-e\log m$$



$$S(m)=\int_a^e\{((m+1)x-2e\log x-e\log m)-((m-1)x-e\log m)\}dx$$

$$=\int_a^e(2x-2e\log x)dx$$

$$=\left[x^2-2ex\log x+2ex\right]_a^e$$

$$=e^2-a^2-2ea+2ea\log a$$

ここで (1) より $a=\dfrac{2e}{m+1}$ から

$$\lim_{m\to\infty}a=\lim_{m\to 0}\frac{2e}{m+1}=0$$

よって $\displaystyle\lim_{m\to\infty}a\log a=\lim_{m\to\infty}\frac{2e}{m+1}\cdot\log\frac{2e}{m+1}$

$$=\lim_{m\to\infty}2e\left(\frac{\log 2e}{m+1}-\frac{\log(m+1)}{m+1}\right)=0\quad\left(\because\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0\right)$$

$\therefore\ \displaystyle\lim_{m\to\infty}S(m)=\lim_{m\to\infty}(e^2-a^2-2ea+2ea\log a)=\underline{e^2}$ —(答)

3 $a(ab-p^2)=c^2$ …… ①
$b \leqq 2c$ …… ②

(1) (解) ①より c^2 は a を約数にもつ.
また a は素数より c は a を約数にもつ.
よって $c=ka$ (k は自然数) とおくと.

①に代入 $a(ab-p^2)=k^2a^2$
$ab-p^2=k^2a$
$a(b-k^2)=p^2$ ―③

同様に p^2 は a を約数にもち. p、a ともに素数より $p=a$

③に代入 $p(b-k^2)=p^2$
$b-k^2=p \iff b=k^2+p$

②に代入して $k^2+p \leqq 2c=2ak=2pk$
$k^2-2pk+p \leqq 0$
$(k-p)^2-(p^2-p) \leqq 0$
$((k-p)+\sqrt{p^2-p})((k-p)-\sqrt{p^2-p}) \leqq 0$ $\therefore$ $p-\sqrt{p^2-p} \leqq k \leqq p+\sqrt{p^2-p}$ ―④

ここで $\sqrt{p^2-p}=\sqrt{p(p-1)}$ より
$\sqrt{(p-1)^2}<\sqrt{p(p-1)}<\sqrt{p^2} \iff p-1<\sqrt{p(p-1)}<p$

よって ④より 自然数 k は $p-(p-1) \leqq k \leqq p+(p-1)$
$\iff 1 \leqq k \leqq 2p-1$

ゆえに $(a,b,c)=(p,k^2+p,pk)$ より
自然数の組 (a,b,c) の個数は $\underline{2p-1}$ (個) ―(答)

(2) (解) (1) において

$$\begin{cases} b = k^2 + p \\ c = kp \end{cases}$$ より $k = 1, 2, 3, \cdots, 2p-1$ のうち

$k = p$ のとき $\begin{cases} b = p^2 + p = p(p+1) \\ c = p^2 \end{cases}$ となり

最大公約数が 1 とならない

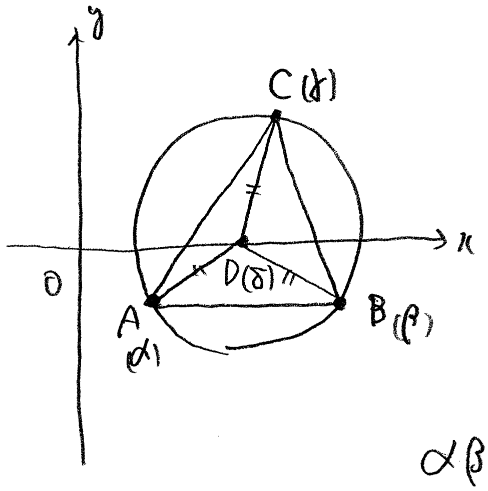
よって $k \neq p$

ゆえに a, b, c の最大公約数が 1 となる自然数の組

(a, b, c) の個数は $\underline{2p-2}$ (個) ―― (答)

4 (1)（解） $w=\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi$ とすると．

$$w^2+w+1=0,\ w^3=1 \quad \text{——①}$$



$$\begin{cases}\beta-\delta=w(\alpha-\delta)\\ \gamma-\delta=w(\beta-\delta)\end{cases}$$

ここで $z=\alpha-\delta$ とおくと

$$\Longleftrightarrow \begin{cases}\beta=w(\alpha-\delta)+\delta=wz+\delta\\ \gamma=w(\beta-\delta)+\delta=w^2z+\delta\end{cases}$$

$\alpha\beta\gamma=-1$ より

$$(z+\delta)(wz+\delta)(w^2z+\delta)=-1$$

$$w^3z^3+w(1+w+w^2)z^2\delta+(1+w+w^2)z\delta^2+\delta^3=-1$$

① より $z^3+\delta^3=-1$ $\quad\therefore z^3=-1-\delta^3$ （実数）

（$\because \delta>-1$）

よって $|z|=(1+\delta^3)^{\frac{1}{3}}$

$\therefore\ l=|\alpha-\delta|=|z|=\underline{(1+\delta^3)^{\frac{1}{3}}}$ ——（答）

(2)（解） (1) より $z^3=-1-\delta^3$ （実数）より

$$\arg z^3=-\pi+2n\pi \quad (n:\text{整数})$$

$$\therefore \arg z=-\frac{\pi}{3}+\frac{2n}{3}\pi$$

$-\pi\leqq\arg\alpha<\arg\beta<\arg\gamma<\pi$ より

$\alpha=\delta+z=\underline{\delta-(1+\delta^3)^{\frac{1}{3}}}$ ——（答）

$\beta=w\left(-(1+\delta^3)^{\frac{1}{3}}\right)+\delta=\delta-w(1+\delta^3)^{\frac{1}{3}}$

$=\underline{\delta-\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+\delta^3)^{\frac{1}{3}}}$ ——（答）

（$\because w=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$）

$\gamma=w^2z+\delta$

$=\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)\left(-(1+\delta^3)^{\frac{1}{3}}\right)+\delta$

$=\underline{\delta+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+\delta^3)^{\frac{1}{3}}}$ ——（答）