$\boxed{\text{I}}$

(1) $x^2+y^2-4ax-2ay+4a^2=0 \quad (a>0)$

$$(x-2a)^2+(y-a)^2=a^2$$

より，円の中心は$(2a,\ a)$，半径はaである．

よって，円の中心は，直線$y=\dfrac{1}{2}x$上にある．…………………………………… アイ

この円と直線$y=mx$が接するのは，直線と円の中心の距離が，円の半径に等しいときであるから，

$$\frac{|2ma-a|}{\sqrt{m^2+1}}=a$$

$$a^2(2m-1)^2=a^2(m^2+1)$$

$a\neq 0$より，

$$3m^2-4m=0$$

$$m(3m-4)=0$$

$m=0$　または　$m=\dfrac{4}{3}$　…………………………………………………… ウ，エオ

のときである．

これらの直線と円の接点A，Bを結んだ直線は，

原点と円の中心を結んだ直線$y=\dfrac{1}{2}x$に垂直なので，

直線ABの傾きは，-2　…………………………………………………………… カキ

直線$y=0$と円の接点AはA$(2a,\ 0)$であるから，直線ABの方程式は，

$$y=-2(x-2a)=-2x+4a$$

よって，円の中心と直線ABの距離は，

$$\frac{|4a+a-4a|}{\sqrt{5}}=\frac{a}{\sqrt{5}}$$

よって，線分ABの長さが3となるのは，

$$\left(\frac{a}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2=a^2$$

$$\frac{4}{5}a^2=\frac{9}{4}$$

$a=\dfrac{3\sqrt{5}}{4}$　$(\because a>0)$　………………………………………………………… クケコ

(2) 合同式の法はすべて11とする.

(a) $1020 \equiv 8 \equiv -3$ より,

$1020^3 \equiv (-3)^3 = -27 \equiv 6$ ………… ア

(b) $g = 1020^3$, $l = 1020^{10}$ とおくと, (a)より, $g \equiv 6$

$l = 1020 \times g^3 \equiv 8 \times 6^3 \equiv 8 \times (-4) \equiv 1$

であるから,

$ab = gl \equiv 6 \times 1 \equiv 6$ ………… イ

である.

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \equiv 10 + 2 \times 6 \equiv 0$ ………… ウ

$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \equiv 10 - 2 \times 6 \equiv 9$ ………… エ

$1^2 \equiv 1$, $2^2 \equiv 4$, $3^2 \equiv 9$, $4^2 \equiv 5$, $5^2 \equiv 3$, $6^2 \equiv 3$, $7^2 \equiv 5$, $8^2 \equiv 9$, $9^2 \equiv 4$, $10^2 \equiv 1$

であるから, $(a+b)^2 \equiv 0$ のとき, $a+b \equiv 0$ であり,

$(a-b)^2 \equiv 9$ のとき, $a-b \equiv \pm 3$ である.

$a+b \equiv 0$ となる10以下の自然数の組は,

(1, 10), (2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6)

であり, このうち, $a-b \equiv \pm 3$ となる組は, (4, 7)のみ.

よって, a, b を11で割ったときの余りは, 小さい順に, 4, 7となる. …… オ, カ

(3) $\mathrm{PQ} = \overset{\frown}{\mathrm{AQ}} = \theta$ であるから, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \theta\left(\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right),\ \sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\right)$

と表せる.

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\cos\theta,\ \sin\theta) + \theta(\cos(\theta + a\pi),\ \sin(\theta + a\pi))$

を満たす a $(-1 < a \leqq 1)$ は, $a = -\dfrac{1}{2}$ である. ………… アイウ

このとき,

$$x(\theta) = \cos\theta + \theta\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta + \theta\sin\theta$$

$$y(\theta) = \sin\theta + \theta\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\theta - \theta\cos\theta$$

となるので,

$x'(\theta) = -\sin\theta + \sin\theta + \theta\cos\theta = \theta\cos\theta$

$y'(\theta) = \cos\theta - \cos\theta + \theta\sin\theta = \theta\sin\theta$

よって,

$(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 = \theta^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = \theta^2$

であるから,

$$\int_0^\alpha \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2}\, d\theta = \int_0^\alpha \theta\, d\theta = \frac{1}{2}\alpha^2 \ (= b\alpha^c)$$

となり, $b = \dfrac{1}{2}$, $c = 2$

また, 糸がちょうどほどき終わるとき, $\alpha = 2\pi$ であるから,

曲線の長さ $(d\pi^f)$ は, $\dfrac{1}{2}(2\pi)^2 = 2\pi^2$

よって, $d = 2$, $f = 2$

$\boxed{\text{II}}$

(1) 2ゲーム終了時にAが優勝するのは,

Aが2連勝する場合であるから,その確率は, $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ ………………………… アイ

4ゲーム終了時にAが優勝するのは,Aの持ち点の推移が,

(i) $2\to3\to2\to3\to4$

(ii) $2\to1\to2\to3\to4$

のいずれかの場合であるから,求める確率は,

$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4}{81}$ ……………………………………………………… ウエオ

Aが優勝する確率をpとする.Aが優勝するのは,

(i) 2ゲーム終了時に優勝する

(ii) 2ゲーム終了時は持ち点2で,その後優勝する

のいずれかである.よって,

$$p=\frac{1}{9}+\frac{4}{9}p$$

が成り立つので,

$p=\frac{1}{5}$ ……………………………………………………………………………… カキ

(2) 持ち点が3の状態からAが優勝する確率をp,持ち点が1の状態かからAが優勝する確率をqとすると,持ち点が3の状態からAが優勝するのは,

(i) 1ゲーム終了時に優勝する

(ii) 2ゲーム終了時に持ち点3でその後優勝する

(iii) 2ゲーム終了時に持ち点1でその後優勝する

のいずれかの場合であるから,

$$p=\frac{1}{3}+\frac{2}{9}p+\frac{4}{9}q \qquad \therefore\ 7p-4q=3 \ \cdots\cdots \ ①$$

また,持ち点が1の状態からAが優勝するのは,

(i) 2ゲーム終了時に持ち点3でその後優勝する

(ii) 2ゲーム終了時に持ち点1でその後優勝する

のいずれかの場合であるから,

$$q=\frac{1}{9}p+\frac{2}{9}q \qquad \therefore\ q=\frac{1}{7}p \ \cdots\cdots \ ②$$

①,②より,

$$7p-\frac{4}{7}p=3$$

$\therefore\ p=\frac{7}{15}$ ……………………………………………………………………… クケコ

はじめのAの持ち点が1のとき,Aの優勝する確率は,

$$q=\frac{1}{7}p=\frac{1}{15}$$

(3) 3ゲーム終了時にAの持ち点が4となるのは,Aの持ち点の推移が,

(i) $3\to4\to5\to4$

(ii) $3\to4\to3\to4$

(iii) $3 \to 2 \to 3 \to 4$

のいずれかとなる場合であるから，求める確率は,

$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$ ……………………………………………… セソ

3 ゲーム終了時に A の持ち点が 4 となるのは，A の持ち点の推移が,

(i) $3 \to 4 \to 3 \to 2$

(ii) $3 \to 2 \to 3 \to 2$

(iii) $3 \to 2 \to 1 \to 2$

のいずれかとなる場合であるから，求める確率は,

$\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$ ……………………………………………… タチ

A の持ち点が 4，2 の状態から A が優勝する確率をそれぞれ p，q とすると,

$p = \frac{1}{9} + \frac{4}{9}p + \frac{4}{9}q \quad \therefore \ 5p - 4q = 1$ …… ①

$q = \frac{1}{9}p + \frac{4}{9}q \quad \therefore \ 5q = p$ …… ②

①，②より,

$p = \frac{5}{21}$，$q = \frac{1}{21}$

よって，持ち点 3 のとき，A が優勝する確率は,

$\frac{1}{3}p + \frac{2}{3}q = \frac{5+2}{63} = \frac{1}{9}$ ……………………………………………………………… ツテ

(4) 1 ゲーム目に A が勝ち，かつ A が優勝する確率は,

$\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}p\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}p$ ……………………………………………………… トナ，ニヌ

A の持ち点が 1 点である状態から A が優勝する確率を p' とすると,

$p' = \frac{1}{4}p + \frac{1}{4}p' \quad \therefore \ p' = \frac{1}{3}p$

よって，1 ゲーム目に B が勝ち，かつ A が優勝する確率は,

$\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p'\right) = \frac{1}{4}\left(p + \frac{1}{3}p\right) = \frac{1}{3}p$

よって，A が優勝する確率 p は,

$p = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}p + \frac{1}{3}p \quad \therefore \ p = \frac{3}{5}$ ………………………………………………………… ネノ

【別解】

A の持ち点が 4，2 の状態から A が優勝する確率をそれぞれ q，r とすると,

$q = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}q + \frac{1}{4}r \quad \therefore \ 3q - r = 2$ …… ①

$r = \frac{1}{4}q + \frac{1}{2}r \quad \therefore \ q = 2r$ …… ②

①，②より,

$q = \frac{4}{5}$，$r = \frac{2}{5}$

A が優勝する確率 p は,

$p = \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}r = \frac{3}{5}$

Ⅲ

(1) 辺ABの中点をD，辺BCの中点をEとすると，

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\vec{b},\quad \overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$$

重心Gは直線AE上にあるから，

$$\overrightarrow{AG}=k\overrightarrow{AE}=\frac{k}{2}\vec{b}+\frac{k}{2}\vec{c}\quad (k\text{ は実数})\ \cdots\cdots\ ①$$

と表せる．また，Gは直線CD上にあるから，

$$\overrightarrow{AG}=(1-t)\overrightarrow{AC}+t\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}t\vec{b}+(1-t)\vec{c}\quad (t\text{ は実数})\ \cdots\cdots\ ②$$

と表せる．$\vec{b}$，$\vec{c}$は一次独立なので，①，②の係数は一致する．

よって，

$$\begin{cases}\dfrac{k}{2}=\dfrac{t}{2}\\[2mm] \dfrac{k}{2}=1-t\end{cases}\qquad \therefore\ k=t=\frac{2}{3}$$

よって，

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$ ……………………………… **(答)**

(2) $\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\vec{b}$

$$\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

よって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DG}&=-\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\left(-\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)\\&=\frac{1}{12}\left|\vec{b}\right|^2-\frac{1}{6}\vec{b}\cdot\vec{c}\\&=\frac{1}{12}\left|\vec{b}\right|^2-\frac{1}{6}\left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\theta\end{aligned}$$ ……………………………… **(答)**

(3) 重心Gが外心と一致するとき，直線DGは線分ABの垂直2等分線となるから，

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DG}=0$$

よって(2)より，

$$\frac{1}{12}\left|\vec{b}\right|^2-\frac{1}{6}\left|\vec{b}\right|\left|\vec{c}\right|\cos\theta=0$$

$\left|\vec{b}\right|\neq 0$であるから，

$$\left|\vec{b}\right|=2\left|\vec{c}\right|\cos\theta\ \cdots\cdots\ ③$$

また，直線GEは線分BCの垂直2等分線となるから，

$$\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{BC}=0$$

$$\left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AG}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)=0$$

$$\left(\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{c}-\vec{b}\right)=0$$

$$\left|\vec{c}\right|^2-\left|\vec{b}\right|^2=0$$

$\left|\vec{b}\right|>0$，$\left|\vec{c}\right|>0$であるから，

$$\left|\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|\ \cdots\cdots\ ④$$

③，④より，

$$\cos\theta = \frac{1}{2}$$

$0° < \theta < 180°$ であるから，$\theta = 60°$

よって，三角形 ABC は，AB = AC かつ $\angle$BAC = 60° であるから，正三角形.

逆に，三角形 ABC が正三角形のとき，重心と外心は一致するので，三角形 ABC において，重心と外心が一致する必要十分条件は，

「三角形 ABC が正三角形である」 …………………………………………………… **(答)**

ことである.