【Ⅰ】

(1) $b_{n+2}=\frac{1}{6}(b_{n+1}+b_n)$ … (＊) に $b_n=a_n-\alpha$ を用いると，

$a_{n+2}-\alpha=\frac{1}{6}(a_{n+1}-\alpha+a_n-\alpha)$

$a_{n+2}=\frac{1}{6}(a_{n+1}+a_n)+\frac{2}{3}\alpha$

これが $a_{n+2}=\frac{1}{6}(a_{n+1}+a_n+8)=\frac{1}{6}(a_{n+1}+a_n)+\frac{4}{3}$ と一致するので，

$\frac{2}{3}\alpha=\frac{4}{3}$ $\quad\therefore\ \alpha=2$

$x^2-\frac{1}{6}x-\frac{1}{6}=0$ を解くと，$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)=0$ より $x=\frac{1}{2},\ -\frac{1}{3}$

これを利用すると(＊)は，

$b_{n+2}+\frac{1}{3}b_{n+1}=\frac{1}{2}\left(b_{n+1}+\frac{1}{3}b_n\right)$ … ①

$b_{n+2}-\frac{1}{2}b_{n+1}=-\frac{1}{3}\left(b_{n+1}-\frac{1}{2}b_n\right)$ … ②

と変形できる.

よって，$c_n=b_{n+1}+\frac{1}{3}b_n$ とおくと，①は，$c_{n+1}=\frac{1}{2}c_n$ と表せるので，

$c_n=c_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$c_1=b_2+\frac{1}{3}b_1=a_2-2+\frac{1}{3}(a_1-2)=\frac{13}{5}+\frac{2}{5}=3$ であるから，

$c_n=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

また，$d_n=b_{n+1}-\frac{1}{2}b_n$ とおくと，②は，$d_{n+1}=-\frac{1}{3}d_n$ と表せるので，

$d_n=d_1\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$d_1=b_2-\frac{1}{2}b_1=\frac{13}{5}-\frac{3}{5}=2$ であるから，

$d_n=2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

したがって，$b_{n+1}+\frac{1}{3}b_n=3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，$b_{n+1}-\frac{1}{2}b_n=2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ より，

$b_n=\frac{6}{5}\left\{3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$

$a_n=\frac{18}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\frac{12}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}+2$

ア：2　イウ：13　エオ：12　カ：3　キ：2　クケコ：185　サシス：125

【Ⅰ】

(2) 連立方程式 $y=\dfrac{x^2}{2}-x$，$y=x$ を解くと，

$\dfrac{x^2}{2}-x=x$

$x(x-4)=0$

$\therefore\ x=4$，$y=4$　　よって，$\mathrm{A}(4,\ 4)$

領域 R の面積は，$\displaystyle\int_0^4\left\{x-\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\right\}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}(4-0)^3=\frac{16}{3}$

点 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{a^2}{2}-a\right)$ を通り，直線 l に垂直な直線の方程式は，$y=-x+\dfrac{a^2}{2}$ であるから，これと直線 l の交点の座標は，連立方程式 $y=x$，$y=-x+\dfrac{a^2}{2}$ を解いて，

$\mathrm{Q}\left(\dfrac{a^2}{4},\ \dfrac{a^2}{4}\right)$ となる．

線分 PQ の長さは，直線 PQ の傾き -1 を考慮し，

$\sqrt{2}\left(a-\dfrac{a^2}{4}\right)=\sqrt{2}a\left(1-\dfrac{a}{4}\right)$ となる．

ここで，$\mathrm{OQ}=X$ とおくと，

$X=\sqrt{2}a-\sqrt{2}a\left(1-\dfrac{a}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}a^2$

よって，求める回転体の体積は，

$$\begin{aligned}\int_0^{4\sqrt{2}}\pi\mathrm{PQ}^2\,dX&=\pi\int_0^4 2a^2\left(1-\frac{a}{4}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a\,da\\&=\frac{\sqrt{2}}{16}\pi\int_0^4 a^3(a-4)^2\,da\\&=\frac{\sqrt{2}}{16}\pi\left[\frac{1}{4}a^4(a-4)^2-\frac{1}{10}a^5(a-4)+\frac{1}{60}a^6\right]_0^4\\&=\frac{\sqrt{2}}{16}\pi\times\frac{4^6}{60}\\&=\frac{64\sqrt{2}}{15}\pi\end{aligned}$$

ア：4　イウエ：163　オカ：14　キ：2　クケ：14　コサシスセ：64215

【Ⅰ】

(3) $z=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$，$|z_1|=1$ より，$|z|=|zz_1|=|zz_1{}^2|=1$ であるから，

$z_1=\cos\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right)+i\sin\left(\pm\frac{2}{3}\pi\right)=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

すなわち，$z_1=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ の場合に 3 点 z，zz_1，$zz_1{}^2$ は正三角形の 3 頂点となる．

次に，3 点 z，zz_2，$z\overline{z_2}$ が正三角形の 3 頂点となるとき，3 点 1，z_2，$\overline{z_2}$ も正三角形の 3 頂点となるので，z_2 の実部が $-\sqrt{3}-1$ のとき，虚部は,

$\pm\left\{1-\left(-\sqrt{3}-1\right)\right\}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\pm\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\pm\frac{3+2\sqrt{3}}{3}$

よって，$z_2=-\sqrt{3}-1\pm\frac{3+2\sqrt{3}}{3}i$

$$
\begin{aligned}
|z_2|&=\sqrt{\left(-\sqrt{3}-1\right)^2+\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)^2}\\
&=\sqrt{4+2\sqrt{3}+\frac{7+4\sqrt{3}}{3}}\\
&=\sqrt{\frac{19+10\sqrt{3}}{3}}
\end{aligned}
$$

よって，$z_3=x+yi$ $(x$，y は実数$)$とおくと，x，y は,

$x^2+y^2=\frac{19+10\sqrt{3}}{3}$，$y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$ を満たす.

よって,

$$x^2+\frac{1}{3}(x-1)^2=\frac{19+10\sqrt{3}}{3}$$

$$4x^2-2x-18-10\sqrt{3}=0$$

$$2x^2-x-9-5\sqrt{3}=0$$

$$\left(x+\sqrt{3}+1\right)\left(2x-\frac{9+5\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right)=0$$

$$\left(x+\sqrt{3}+1\right)\left(2x-3-2\sqrt{3}\right)=0$$

$$x=-\sqrt{3}-1,\ \frac{3+2\sqrt{3}}{2}$$

このとき，$y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{3+2\sqrt{3}}{2}-1\right)=\pm\frac{6+\sqrt{3}}{6}$

よって，$z_3=\frac{3+2\sqrt{3}}{2}\pm\frac{6+\sqrt{3}}{6}i$

アイウエオ：-1232　　カキクケ：3233　　コサシスセソタ：3232636

【Ⅰ】

(4) $y=\log x$ の，点 $(t,\ \log t)$ における接線の方程式は， $y=\dfrac{1}{t}(x-t)+\log t$

これが原点を通るとき， $t=e$

よって，原点を通り $y=\log x$ に接する直線の方程式は， $y=\dfrac{1}{e}x$

$y=e^x$ と $y=\log x$ は直線 $y=x$ に関して対称なので，

原点を通り $y=e^x$ に接する直線の方程式は， $y=ex$

よって， $\mathrm{A}(e,\ 1)$， $\mathrm{B}(1,\ e)$ のとき，$\angle\mathrm{AOB}$ の大きさは最小，

すなわち $\overrightarrow{\mathrm{OA}'}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$ の内積は最大となる．

したがって， $m=\dfrac{1}{\sqrt{e^2+1}}\begin{pmatrix}e\\1\end{pmatrix}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{e^2+1}}\begin{pmatrix}1\\e\end{pmatrix}=\dfrac{2e}{e^2+1}$

$\therefore\ \log m=1+\log 2-\log\left(e^2+1\right)$

アイウエ：1221

【II】

扇形 P′Q′R の面積は，$\dfrac{25}{2}\alpha$ であるから，斜線部分の面積は，$\dfrac{25}{2}\alpha\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{15}{2}\alpha$

孤 EF 上の任意の点を X とすると，$AX+XD=2$ であるから，孤 EF は A，D を焦点とし，長半径が 1，短半径が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の楕円 … ①の一部である．

同様に，孤 FG は B，D を焦点とし，長半径が $\dfrac{3}{2}$，短半径が $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ の楕円の一部である．

楕円①に外接する，半径 1 の円と，DE，DF の延長との交点をそれぞれ E′，F′ とすると，

$\angle E'MF'=\dfrac{\pi}{3}$ であるから，孤 EF と線分 ME，MF で囲まれる部分の面積は，$\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi$

$AF=x$ とすると，$FD=2-x$ であり，$\angle FAD=90^\circ$ であるから，三平方の定理より，

$(2-x)^2=x^2+1$　　∴ $AF=x=\dfrac{3}{4}$

直線 FF′ と線分 BD の交点を H とすると，$OH=BH-OB=\dfrac{7\sqrt{2}}{8}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$ であるから，

$\sin\beta=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3\sqrt{2}}{8}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

よって，孤 FG，線分 OF，OG で囲まれる部分の面積は，$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{\sqrt{7}}{2}\times2\beta=\dfrac{3\sqrt{7}}{4}\beta$

△OMF の面積は，$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$ であるから，求める面積は，

$4\left(\dfrac{1}{8}\times2+\dfrac{\sqrt{3}}{12}\pi+\dfrac{3\sqrt{7}}{4}\beta\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi+3\sqrt{7}\beta+1$ となる．

アイウ：152　エ：1　オカ：32　キク：32　ケコ：72　サシス：312
セソ：34　タチ：24　ツテト：374　ナニヌネノ：33671

【Ⅲ】

(1) $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)-\dfrac{f(a)+f(b)}{2}=-\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2-\dfrac{-a^2-b^2}{2}$

$$=\frac{a^2+b^2-2ab}{4}$$

$$=\frac{(a-b)^2}{4}\geqq 0$$

よって，$f(x)=-x^2$ は$-\infty<x<\infty$ で性質(A)をもつ.

(2)

(i) $k=1$ のとき，$n=2$ より，性質(A)となり，(B)は成り立つ.

(ii) $k=l$ すなわち，$n=2^l$ のとき，(B)が成り立つと仮定すると，

$$f\left(\frac{a_1+\cdots+a_{2^l}}{2^l}\right)\geqq\frac{f(a_1)+\cdots+f(a_{2^l})}{2^l}$$

$k=l+1$ のとき，

$$f\left(\frac{a_1+\cdots+a_{2^l}+a_{2^l+1}+\cdots+a_{2^{l+1}}}{2^{l+1}}\right)=f\left(\frac{\dfrac{a_1+\cdots+a_{2^l}}{2^l}+\dfrac{a_{2^l+1}+\cdots+a_{2^{l+1}}}{2^l}}{2}\right)$$

$$\geqq\frac{f\left(\dfrac{a_1+\cdots+a_{2^l}}{2^l}\right)+f\left(\dfrac{a_{2^l+1}+\cdots+a_{2^{l+1}}}{2^l}\right)}{2}\quad(\because\ \text{性質(A)})$$

$$\geqq\frac{\dfrac{f(a_1)+\cdots+f(a_{2^l})}{2^l}+\dfrac{f(a_{2^l+1})+\cdots+f(a_{2^{l+1}})}{2^l}}{2}\quad(\because\ \text{帰納法の仮定})$$

$$=\frac{f(a_1)+\cdots+f(a_{2^l})+f(a_{2^l+1})+\cdots+f(a_{2^{l+1}})}{2^{l+1}}$$

よって，$k=l+1$ のときも(B)は成り立つ.

(i)，(ii)より，任意の自然数 k について，$n=2^k$ のとき，(B)は成り立つ.

(3) (B)より，$f\left(\dfrac{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}+\cdots+\dfrac{n}{n}}{n}\right)\geqq\dfrac{f\left(\dfrac{1}{n}\right)+f\left(\dfrac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{n}{n}\right)}{n}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

よって，$f\left(\dfrac{n+1}{2n}\right)\geqq\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)$

$f(x)$ は連続関数なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{n+1}{2n}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,dx$

したがって，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx\leqq f\left(\frac{1}{2}\right)$

【別解(凸性を既知とした解答)】

点$\left(\dfrac{1}{2},\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$における接線の方程式は，$y=f'\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

性質(A)より，関数 $f(x)$ は上に凸であるから，

$f(x)\leqq f'\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ が成り立つ.

よって，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx\leqq\frac{1}{2}\left\{\left(0-\frac{1}{2}\right)f'\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{2}\right)f'\left(\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}=f\left(\frac{1}{2}\right)$